

Книга написана на основе курсов лекций, читаемых авторами для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики, а также факультета космических исследований Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Излагаются классическая, аналитическая, статистическая и релятивистская механика. Предполагается знание основ высшей математики. Для студентов высших учебных заведений и преподавателей физики.

С.Ю.Никитин, С.С.Чесноков. Механика.



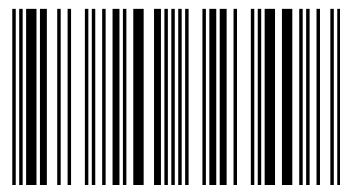
Сергей Юрьевич Никитин  
Сергей Сергеевич Чесноков

# Механика



Никитин Сергей Юрьевич доктор физико-математических наук, доцент физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.  
Чесноков Сергей Сергеевич кандидат физико-математических наук, доцент физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

FOR AUTHOR USE



978-620-0-32340-8

Никитин, Чесноков



**Сергей Юрьевич Никитин  
Сергей Сергеевич Чесноков**

**Механика**

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

**Сергей Юрьевич Никитин  
Сергей Сергеевич Чесноков**

**Механика**

FOR AUTHOR USE ONLY

**LAP LAMBERT Academic Publishing RU**

## **Imprint**

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: Предоставлено автором

Publisher:

LAP LAMBERT Academic Publishing

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

**ISBN: 978-620-0-32340-8**

Copyright © Сергей Юрьевич Никитин, Сергей Сергеевич Чесноков

Copyright © 2019 International Book Market Service Ltd., member of  
OmniScriptum Publishing Group

FOR AUTHOR USE ONLY

# Механика

С. Ю. НИКИТИН, С. С. ЧЕСНОКОВ

FOR AUTHOR USE ONLY

Москва , 2019

Книга написана на основе курсов лекций, читаемых авторами для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики, а также факультета космических исследований Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Излагаются классическая, аналитическая, статистическая и релятивистская механика.

Для студентов высших учебных заведений и преподавателей физики.

FOR AUTHOR USE ONLY

## Оглавление

<b>Введение</b>	8
<b>1. Кинематика материальной точки</b>	8
Материальная точка. Измерение расстояний и промежутков времени. Декартова система координат. Радиус-вектор, скорость и ускорение точки. Полярные, цилиндрические и сферические координаты. Равномерное прямолинейное движение. Равнопеременное прямолинейное движение. Свободное падение тела. Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом к горизонту.	
<b>2. Тангенциальное и нормальное ускорения</b>	14
Тангенциальное и нормальное ускорения. Кривизна кривой в точке. Кривизна кривой, заданной в декартовых координатах.	
<b>3. Относительность механического движения</b>	18
Относительность механического движения. Правило сложения скоростей. Сложение ускорений.	
<b>4. Кинематика твердого тела</b>	21
Поступательное движение твердого тела. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость вращения тела. Скорость движения произвольной точки тела. Вектор угловой скорости. Векторное произведение векторов. Вектор скорости произвольной точки тела. Движение тела с одной неподвижной точкой. Мгновенная ось вращения тела.	
<b>5. Матрица поворота тела</b>	26
Скалярное произведение векторов. Матрица поворота тела. Преобразование декартовых компонент вектора при повороте системы координат. Двойной поворот и матричное произведение.	
<b>6. Кинематика вращающихся систем отсчета</b>	30
Связь перемещений точки относительно неподвижной и вращающейся систем отсчета. Связь скоростей точки. Связь ускорений точки. Переносное и кориолисово ускорения. Центробежное ускорение.	
<b>7. Законы Ньютона</b>	35
Первый закон Ньютона. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Сила и масса. Измерение сил и масс. Сложение сил.	
<b>8. Силы в механике</b>	37
Гравитационные силы. Закон всемирного тяготения. Принцип суперпозиции. Притяжение материальной точки к шару. Сила упругости. Закон Гука. Коэффициент упругости пружины. Динамометр. Модуль Юнга. Сила трения. Трение покоя. Сила нормального давления. Коэффициент трения. Трение скольжения. Вязкое трение.	
<b>9. Притяжение материальной точки к шару</b>	42
Притяжение материальной точки к кольцу. Притяжение материальной точки к диску. Притяжение материальной точки к шару.	
<b>10. Электромагнитные силы</b>	46
Электрические силы. Магнитные силы. Сила Лоренца.	
<b>11. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции</b>	50
Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета. Сила инерции. Переносная, центробежная и кориолисова силы инерции. Особенности сил инерции. Невесомость и перегрузка. Маятник Фуко. Центрифуга.	
<b>12. Импульс частицы и системы частиц. Движение центра масс</b>	53



Импульс материальной точки. Закон изменения импульса точки. Импульс системы частиц. Центр масс системы частиц. Скорость и ускорение центра масс. Внутренние и внешние силы. Закон движения центра масс.

- 13. Закон сохранения импульса** 58  
Закон изменения импульса механической системы. Закон сохранения импульса. Закон сохранения импульса относительно оси.
- 14. Реактивное движение** 60  
Реактивное движение. Реактивная сила. Стартовая масса ракеты.
- 15. Работа и потенциальная энергия** 63  
Элементарная работа. Работа. Единица измерения работы. Потенциальная сила. Элементарная потенциальная энергия. Потенциальная энергия. Выражение силы через потенциальную энергию. Градиент. Потенциальная энергия системы частиц.
- 16. Потенциальная энергия механических систем** 66  
Потенциальная энергия материальной точки в однородном поле тяготения. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяготения. Потенциальная энергия пружины. Потенциальная энергия материальной точки в центральном силовом поле. Потенциальная энергия материальной точки в гравитационном поле заданной системы частиц. Потенциальная энергия материальной точки в поле тяготения однородного шара. Сила притяжения материальной точки к шару.
- 17. Кинетическая энергия частицы и системы частиц** 74  
Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия системы частиц.
- 18. Кинетическая энергия твердого тела** 76  
Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное движение. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Момент инерции тела относительно данной оси. Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение.
- 19. Закон сохранения энергии в механике** 79  
Полная механическая энергия. Закон изменения полной энергии. Закон сохранения энергии в механике Ньютона.
- 20. Упругий удар шаров** 81  
Упругий удар. Уравнения сохранения импульса и энергии. Вектор удара.
- 21. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы** 85  
Момент импульса частицы. Момент силы. Момент импульса системы частиц. Моменты относительно оси.
- 22. Момент импульса твердого тела** 91  
Момент импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Момент импульса тела относительно оси вращения. Момент импульса тела, совершающего плоское движение.
- 23. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульса** 93  
Теорема моментов для материальной точки. Теорема моментов для системы частиц. Теорема моментов относительно оси. Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.
- 24. Материальная точка в центральном поле** 98  
Центральное силовое поле. Законы Кеплера. Сохранение момента импульса. Плоский характер движения материальной точки в центральном поле. Сохранение энергии. Уравнения сохранения энергии и момента импульса в полярных координатах.
- 25. Первый закон Кеплера** 101  
Уравнение траектории материальной точки в центральном силовом поле. Типы траекторий:

	окружность, эллипс, парабола, гипербола. Вывод уравнения траектории.	
<b>26. Второй закон Кеплера</b>		106
	Секторная площадь. Секторная скорость. Сохранение секторной скорости материальной точки при движении в центральном силовом поле.	
<b>27. Третий закон Кеплера</b>		108
	Период обращения планеты вокруг Солнца. Уравнение траектории планеты. Параметры эллиптической орбиты.	
<b>28. Движение частицы в поле отталкивающего силового центра</b>		111
	Потенциальная энергия взаимодействия точечных электрических зарядов. Уравнения сохранения энергии и момента импульса. Уравнение траектории движения частицы. Прицельный параметр и угол рассеяния.	
<b>29. Формула Резерфорда</b>		118
	Опыты Резерфорда. Формула Резерфорда. Вывод формулы Резерфорда.	
<b>30. Плоское движение твердого тела</b>		120
	Уравнение движения центра масс. Уравнение вращения тела. Угловое ускорение вращения тела. Уравнение вращения тела в поступательно движущейся системе отсчета, связанная с центром масс. Уравнение колебаний физического маятника. Скатывание цилиндра по наклонной плоскости. Сводка формул, описывающих плоское движение твердого тела.	
<b>31. Момент инерции тела</b>		128
	Момент инерции тела относительно данной оси. Теорема Гюйгенса – Штейнера. Момент инерции стержня. Момент инерции диска. Момент инерции шара.	
<b>32. Тензор инерции твердого тела. Главные оси инерции</b>		135
	Типы движения твердого тела. Движение центра масс. Вращение тела. Движение тела с одной неподвижной точкой. Тензор инерций тела. Главные оси инерции. Главные моменты инерции тела. Кинетическая энергия твердого тела.	
<b>33. Динамика твердого тела. Уравнения Эйлера</b>		140
	Уравнения движения тела с одной неподвижной точкой. Свободное вращение симметричного волчка. Движение асимметричного волчка. Уравнения для матрицы поворота тела.	
<b>34. Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты</b>		146
	Связи в механике. Уравнения связи. Заданные силы. Силы реакции. Голономные связи. Стационарные связи. Число степеней свободы системы. Обобщенные координаты. Обобщенные скорости. Свойства обобщенных координат.	
<b>35. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи</b>		149
	Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи. Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность, качение без проскальзывания, невесомый жесткий стержень.	
<b>36. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы</b>		152
	Уравнения движения идеальной голономной системы. Исключение сил реакции. Уравнение Даламбера – Лагранжа. Переход к обобщенным координатам. Уравнения Лагранжа относительно кинетической энергии. Обобщенная сила. Пример – математический маятник.	
<b>37. Функция Лагранжа. Обобщенные импульсы</b>		157
	Уравнения движения идеальной голономной системы с потенциальными заданными силами. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа относительно функции Лагранжа. Обобщенный импульс. Закон изменения обобщенного импульса. Закон сохранения обобщенного импульса.	
<b>38. Уравнения Гамильтона. Канонические переменные</b>		161

Канонические переменные. Уравнения движения идеальной голономной системы с потенциальными заданными силами. Функция Гамильтона. Уравнения Гамильтона.

- 39. Гамильтониан консервативной системы** 164  
Закон изменения гамильтониана. Консервативная система. Гамильтониан консервативной системы и ее полная механическая энергия.
- 40. Равновесие системы и его устойчивость** 168  
Равновесие механической системы. Условия равновесия. Устойчивость равновесия.
- 41. Колебания в системах с одной степенью свободы** 172  
Колебания. Период колебаний. Уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, частота и фаза колебаний. Определение частоты колебаний. Физический маятник. Математический маятник. Формула Гюйгенса. Пружинный осциллятор.
- 42. Физические эффекты в колебательных системах** 178  
Гармонические колебания. Затухающие колебания. Нелинейные колебания. Параметрические колебания. Вынужденные колебания. Резонанс.
- 43. Нормальные колебания и нормальные координаты** 185  
Колебания связанных осцилляторов. Нормальные координаты. Собственные частоты колебаний. Нормальные колебания.
- 44. Колебания струны** 189  
Волновое уравнение. Решение волнового уравнения. Бегущие волны. Скорость распространения волны. Стоячая волна. Период и частота колебаний струны. Длина волны и волновое число. Граничные условия. Основной тон. Обертонны. Узлы и пучности стоячей волны.
- 45. Уравнения динамики сплошной среды** 197  
Переменные и параметры, характеризующие звуковую волну. Уравнение движения элемента идеальной сплошной среды. Уравнение непрерывности. Уравнение состояния среды. Система уравнений динамики идеальной сплошной среды.
- 46. Звуковая волна** 201  
Приближение слабой звуковой волны. Линеаризация уравнений. Волновое уравнение. Скорость звука.
- 47. Случайные величины и вероятности** 203  
Случайное событие. Вероятность случайного события. Аксиома сложения вероятностей. Аксиома умножения вероятностей. Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины. Распределение плотности вероятности. Условие нормировки. Правило вычисления средних. Среднее значение случайной величины. Дисперсия случайной величины. Гауссова случайная величина. Интеграл Пуассона. Многомерная плотность вероятности. Условие нормировки. Правило вычисления средних. Понижения порядка распределения. Независимые случайные величины.
- 48. Распределение Гиббса** 210  
Термодинамическое равновесие. Основной закон статистической механики равновесных систем. Температура. Единица измерения температуры - градус Цельсия. Абсолютная температура. Распределение молекул по скоростям. Дисперсия тепловой скорости молекулы. Уравнение состояния идеального газа. Распределение частиц во внешнем силовом поле. Распределение частиц в поле силы тяжести. Средняя высота частицы над поверхностью Земли.
- 49. Размер и масса молекул** 217  
Масса молекулы воздуха. Размер молекулы воздуха. Среднее расстояние между молекулами воздуха. Средняя скорость теплового движения молекул воздуха. Среднее время свободного пробега молекул воздуха.
- 50. Измерение постоянной Больцмана** 222

	Измерение постоянной Больцмана. Броуновское движение. Опыт Перрена. Факты, подтверждающие распределение Гиббса: свойства газов, распределение воздуха в атмосфере Земли.	
<b>51. Распределение энергии по степеням свободы</b>		<b>226</b>
	Закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Температура как мера средней кинетической энергии молекул. Внутренняя энергия идеального газа. Теплоемкость идеального газа и строение молекул газа.	
<b>52. Диффузия и теплопроводность</b>		<b>231</b>
	Диффузия. Закон диффузии. Коэффициент диффузии. Уравнение диффузии. Теплопроводность. Закон теплопроводности. Коэффициент теплопроводности. Уравнение теплопроводности.	
<b>53. Вязкость жидкости</b>		<b>237</b>
	Вязкость. Закон вязкости. Коэффициент вязкости. Сила вязкого трения. Уравнение движения вязкой жидкости.	
<b>54. Течение вязкой жидкости</b>		<b>241</b>
	Течение вязкой жидкости по трубе. Формула Пуазейля.	
<b>55. Принцип относительности. Преобразования Галилея и преобразования Лоренца</b>		<b>244</b>
	Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Проблема с теорией электромагнитного поля. Гипотеза неподвижного эфира. Продольная и поперечная скорости света. Опыт Майкельсона. Принцип постоянства скорости света. Относительность времени. Преобразования Лоренца. Принцип относительности Эйнштейна.	
<b>56. Кинематика в теории относительности</b>		<b>250</b>
	Преобразования Лоренца. Правила преобразования скоростей материальной точки при изменении системы отсчета. Правила преобразования ускорений точки при изменении системы отсчета.	
<b>57. Релятивистское уравнение движения</b>		<b>255</b>
	Релятивистское уравнение движения. Вывод релятивистского уравнения движения. Релятивистский импульс. Уточнение понятия массы.	
<b>58. Импульс и энергия в теории относительности</b>		<b>266</b>
	Релятивистский импульс и релятивистская энергия. Закон изменения релятивистского импульса. Закон сохранения импульса в теории относительности. Преобразование релятивистского импульса и релятивистской энергии при изменении системы отсчета. Закон сохранения энергии в теории относительности. Энергия покоя тела. Взаимные превращения массы и энергии. Фотон. Световое давление. Факты, подтверждающие теорию относительности.	
<b>59. Рассеяние фотонов на электронах</b>		<b>276</b>
	Эффект Комптона. Рассеяние фотона на релятивистском электроном и генерация рентгеновского излучения.	
<b>60. Модель строения атома</b>		<b>280</b>
	Испускание и поглощение света атомом. Опыты Резерфорда. Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Волновые свойства электронов. Волна де Бройля. Модель атома Бора. Размер и энергия атома.	

## Введение

Освоение космоса, создание машин и механизмов, изучение строения и свойств вещества, включая живую материю – все это требует глубокого понимания механики – науки о движении и взаимодействии тел. Основы этой науки были заложены еще в древней Греции, когда был открыт закон Архимеда. Механика в современном смысле этого слова появилась в 17 веке, благодаря трудам Галилея, Гюйгенса, Кеплера и Ньютона. В 18 веке Эйлер, Даламбер и Лагранж развивали математический аппарат механики. Основы теории строения вещества заложили Максвелл, Больцман и Гиббс в 19 веке. В начале 20 века Эйнштейн создал теорию относительности – науку, изменившую представления о пространстве и времени. Наконец, в двадцатых годах 20 века Бор, Гейзенберг и Шредингер создали квантовую механику – науку о строении атома.

Эта книга написана на основе курсов лекций, читаемых авторами для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики, а также факультета космических исследований Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Излагаются классическая, аналитическая, статистическая и релятивистская механика.

### 1. Кинематика материальной точки

Материальная точка. Измерение расстояний и промежутков времени. Декартова система координат. Радиус-вектор, скорость и ускорение точки. Полярные, цилиндрические и сферические координаты. Равномерное прямолинейное движение. Равнопеременное прямолинейное движение. Свободное падение тела. Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом к горизонту.

Мы приступаем к изучению механики – науки о движении тел. Задача механики – математически точно описать движение тела. Решение этой задачи мы начнем с кинематики – раздела механики, изучающего движение тел без рассмотрения причин этого движения.

Материальная точка. Так называют тело, размерами которого можно пренебречь. Например, рассматривая движение Земли вокруг Солнца, мы можем считать Землю материальной точкой. Это связано с тем, что расстояние от Земли до Солнца значительно превышает собственный размер земного шара. В отношении других явлений земной шар, конечно, не является материальной точкой. Отметим, что сама возможность математически точного описания движения тел появляется благодаря понятию материальной точки. Тело произвольного размера и формы можно представить как совокупность связанных между собой маленьких элементов – материальных точек. Тело, по отношению к которому будем рассматривать движение материальной точки, назовем телом отсчета.

Измерение расстояний и промежутков времени. Рассмотрим движение точки по прямой линии. Для описания такого движения необходимо решить две основные проблемы: измерение расстояний и промежутков времени. Эти проблемы решаются следующим образом. Чтобы измерить расстояние, сравним его с длиной некоторого тела, принятого за эталон. Чтобы измерить промежуток времени сравним его с

продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон. Иными словами, необходимо ввести единицы измерения расстояний и промежутков времени.

В системе СИ единицей измерения расстояния является один метр. Согласно современному определению, метр это расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за одну трехсотмиллионную долю секунды. Секунда это продолжительность приблизительно  $10^{10}$  колебаний электрона в атоме цезия. Любое расстояние  $x$  можно измерить в метрах, любой промежуток времени  $t$  можно измерить в секундах. Математически это записывается так:  $x[\text{м}], t[\text{с}]$ . Закон движения точки по прямой линии можно выразить формулой

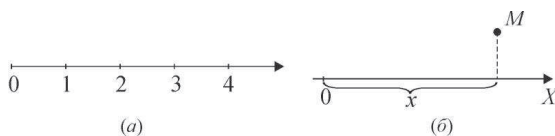
$$x = x(t)$$

Здесь  $x$  - расстояние от данной материальной точки  $M$  до некоторой другой точки  $O$ , принятой за начало отсчета. Например, закон свободного падения материальной точки выражается формулой

$$x = \frac{gt^2}{2}$$

Здесь  $g$  – постоянная величина, называемая ускорением свободного падения.

Декартова система координат. Теперь мы можем ввести понятие оси координат. Так называют прямую линию, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица измерения длины (рис. 1.1а). Условимся считать величину  $x$  положительной, если материальная точка смещена относительно начала отсчета в положительном направлении и отрицательной в противном случае. Определенная таким образом величина  $x$  называется координатой материальной точки. Это понятие можно обобщить и на случай, когда материальная точка не лежит на координатной оси. В этом случае координатой точки считают координату основания перпендикуляра, опущенного из точки на ось координат (рис. 1.1б).

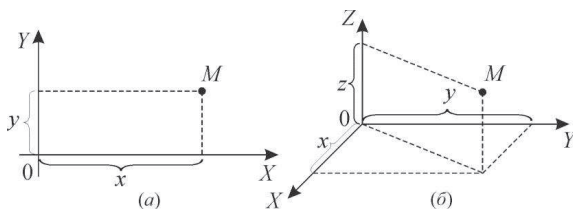


Ось координат (а), и координата материальной точки (б)

Рис. 1.1

Для описания положения точки на плоскости используют декартову систему координат, которая представляет собой пару взаимно перпендикулярных осей координат, имеющих общее начало отсчета. Обозначим координату материальной точки по отношению к первой координатной оси через  $x$ , а по отношению ко второй координатной оси – через  $y$ . Координаты  $x, y$  однозначно определяют положение точки на плоскости (рис. 1.2а). Движение точки на плоскости можно описать формулами  $x = x(t), y = y(t)$ . Эти формулы выражают закон движения точки на плоскости. Аналогично, движение

точки в пространстве можно описать с помощью трехмерной декартовой системы координат (рис. 1.2б). Закон такого движения выражается формулами  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .



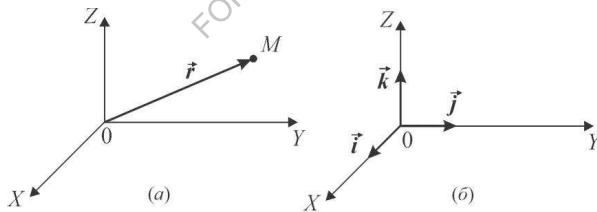
Декартовы координаты точки на плоскости (а)  
и в пространстве (б)

Рис. 1.2.

Радиус-вектор, скорость и ускорение точки. Назовем радиус-вектором материальной точки вектор, проведенный от начала отсчета к данной материальной точке (рис. 1.3а). Этот вектор будем обозначать буквой  $\vec{r}$ . Тогда закон движения точки можно выразить формулой

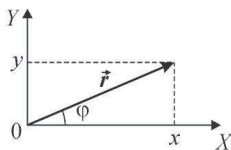
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Проекцией вектора на ось называется разность координат конца и начала вектора, взятых по отношению к данной оси. Например, если радиус-вектор точки составляет угол  $\varphi$  с осью  $x$ , то его проекция на эту ось  $x = r \cdot \cos\varphi$ , где  $r \equiv |\vec{r}|$  - модуль (длина) вектора  $\vec{r}$  (рис. 1.4).



Радиус-вектор точки (а) и орты декартовой системы координат (б)

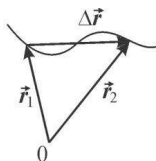
Рис.1.3.



Проекция вектора  
на оси координат

Рис. 1.4.

Перемещением называют разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени (рис. 1.5):  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , где  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ ,  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ . Величина  $\Delta t = t_2 - t_1$  называется длительностью перемещения. Линия, по которой движется материальная точка, называется траекторией движения. В пределе малой длительности вектор перемещения точки  $d\vec{r}$  направлен по касательной к траектории.



Вектор перемещения точки

Рис. 1.5.

Скоростью материальной точки называется отношение перемещения точки к его длительности в пределе, когда длительность перемещения стремится к нулю. Иными словами, скорость есть производная радиус-вектора точки по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ускорением материальной точки называется производная скорости точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Для краткости, условимся обозначать дифференцирование по времени точкой над буквой. Тогда  $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$  и  $\dot{\vec{a}} \equiv \ddot{\vec{r}}$ , а также  $\ddot{\vec{a}} \equiv \ddot{\vec{r}}$ . Скорость измеряется в метрах в секунду, а ускорение – в метрах на секунду в квадрате:  $v[\text{м/с}]$ ,  $a[\text{м/с}^2]$ .

Назовем ортами декартовой системы координат единичные векторы, направленные вдоль осей координат (рис. 1.3б). Обозначим эти векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . По определению

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Тогда

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad \vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z, \quad \vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$$

Величины  $v_x, v_y, v_z$  называются декартовыми компонентами скорости, а величины  $a_x, a_y, a_z$  - декартовыми компонентами ускорения точки. Из данных определений следует, что вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения точки. Декартовы компоненты скорости и ускорения связаны с координатами точки формулами

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$



$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

Условимся обозначать модули (абсолютные величины) векторов буквами без стрелок, т.е.  $r \equiv |\vec{r}|$ ,  $v \equiv |\vec{v}|$ ,  $a \equiv |\vec{a}|$ . Используя теорему Пифагора, модули радиус-вектора, скорости и ускорения точки запишем в виде

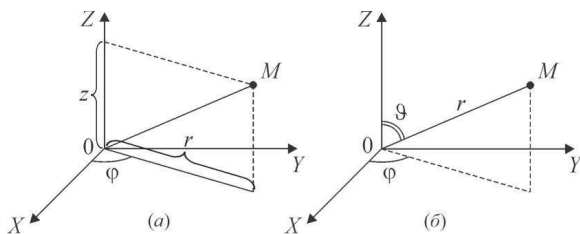
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Полярные, цилиндрические и сферические координаты. Помимо декартовых координат в механике широко используют полярные координаты  $r, \varphi$  на плоскости, а также цилиндрические  $r, \varphi, z$  и сферические  $r, \theta, \varphi$  координаты в пространстве. Первая полярная координата  $r$  определяется как расстояние материальной точки до начала отсчета (модуль радиус-вектора точки), вторая полярная координата  $\varphi$  представляет собой угол между радиус-вектором точки на плоскости и осью  $x$ . Область изменения полярных координат  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Полярные координаты связаны с декартовыми координатами точки на плоскости формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Цилиндрические координаты включают в себя полярные координаты точки  $r$  и  $\varphi$  на плоскости и координату  $z$  точки относительно оси, перпендикулярной этой плоскости (рис. 1.6а). Сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  определяются так (рис. 1.6б). Координата  $r$  представляет собой расстояние от материальной точки до начала отсчета (модуль радиус-вектора точки), координата  $\theta$  определяется как угол между радиус-вектором точки и осью  $z$ , координата  $\varphi$  есть угол между осью  $x$  и проекцией радиус-вектора точки на плоскость  $x, y$ . Область изменения сферических координат  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Сферические координаты связаны с декартовыми координатами точки на плоскости формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

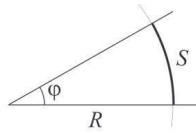


Цилиндрические (а) и сферические (б) координаты материальной точки

Рис. 1.6.

Здесь углы  $\theta$  и  $\varphi$  измеряются в радианах. Углом в радианах называется отношение длины дуги окружности, попадающей в пределы угла, к радиусу этой окружности (рис. 1.7):

$$\varphi = S/R$$



Измерение угла в радианах

Рис. 1.7

Например, полный угол в радианах равен  $2\pi$ , развернутый угол  $\pi$  и т. д. Угол в радианах позволяет записать длину дуги окружности, соответствующей центральному углу  $\varphi$ , как

$$S = R\varphi$$

Равномерное прямолинейное движение. Равномерным называют движение с постоянной скоростью. Полагая  $v_x = \dot{x} = const$  и  $x(t = 0) = x_0$ , получим

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

Эта формула выражает закон равномерного прямолинейного движения.

Равнопеременное прямолинейное движение. Так называют движение с постоянным ускорением – равноускоренное или равнозамедленное. Полагая  $a_x = const$ ,  $x(t = 0) = x_0$ ,  $v_x(t = 0) = v_{x0}$ , получим закон изменения скорости

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t$$

и координаты

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + a_x t^2/2$$

как функций времени. В частности, если  $x_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $a_x = a$ , то

$$x(t) = at^2/2$$

Таким образом, при равноускоренном движении без начальной скорости пройденный телом путь пропорционален квадрату времени движения. Полученную формулу можно использовать для измерения ускорения тела:

$$a = 2S/t^2$$

Здесь  $S$  - путь, пройденный телом при равноускоренном движении без начальной скорости,  $t$  - время движения.

Свободное падение тела. Так называют движение тела, происходящее под действием одной только силы тяжести. Например, тяжелый металлический шар падает в воздухе по закону, близкому к свободному падению. Как показывает опыт, при свободном падении путь, пройденный телом, пропорционален квадрату времени движения. Это означает, что свободное падение является равноускоренным движением.

Ускорение свободного падения. Определяя ускорение свободного падения по формуле  $a = 2S/t^2$ , получим величину  $a = 9.8 \text{ м/с}^2$ . Эта величина называется ускорением свободного падения и обозначается буквой  $g$ . Итак, ускорение свободного падения тела вблизи поверхности Земли

$$g = 9.8 \text{ м/с}^2$$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Как показывает опыт, такое движение происходит по горизонтали равномерно, а по вертикали с постоянным ускорением  $g$ , направленным вниз. Траектория движения материальной точки в однородном поле тяготения представляет собой параболу.

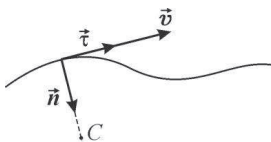
## 2. Тангенциальное и нормальное ускорения

Тангенциальное и нормальное ускорения. Кривизна кривой в точке. Кривизна кривой, заданной в декартовых координатах.

Тангенциальное и нормальное ускорения. При описании криволинейного движения точки полезны понятия тангенциального и нормального ускорений. Так называются составляющие вектора ускорения, направленные, соответственно, параллельно и перпендикулярно вектору скорости точки (рис. 2.1). Эти ускорения обозначаются  $a_t$  и  $a_n$ , и определяются формулой

$$\vec{a} = \vec{\tau} a_t + \vec{n} a_n$$

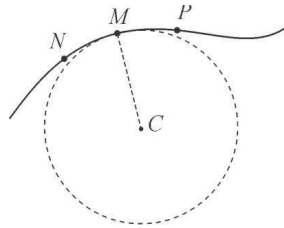
Здесь  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  единичные векторы, первый из которых параллелен вектору скорости материальной точки, а второй – перпендикулярен вектору скорости и направлен к центру кривизны траектории в данной точке. Векторы  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  играют роль ортов вспомогательной системы координат, связанной с самой движущейся точкой. Особенность этих ортов состоит в том, что при движении точки по криволинейной траектории они меняют свое направление в пространстве. Это нужно учитывать при вычислении ускорения точки.



К понятиям тангенциального и нормального ускорений

Рис. 2.1.

Кривизна кривой в точке. Кругом кривизны кривой в данной точке  $M$  называется круг, проведенный через точку  $M$  и две другие точки кривой  $N$  и  $P$  в пределе, когда  $N$  стремится к  $M$  и  $P$  стремится к  $M$  (рис. 2.2). Радиус круга кривизны  $R$  называют радиусом кривизны кривой в точке, а центр этого круга – точку  $C$  – центром кривизны кривой в точке  $M$ .



Круг кривизны кривой в точке

Рис. 2.2.

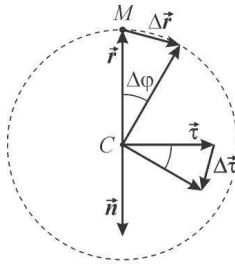
Математически вектор  $\vec{\tau}$  можно определить как отношение вектора скорости точки к его модулю:  $\vec{\tau} = \vec{v}/v$ . Теперь вектор скорости точки можно записать как  $\vec{v} = \tau v$ , а вектор ускорения как

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\tau v)$$

Вычислим эту производную. По правилу дифференцирования произведения

$$\vec{a} = \tau \frac{dv}{dt} + v \frac{d\tau}{dt}$$

Здесь  $d\tau$  - приращение орта  $\tau$  за время  $dt$ . Этот вектор показан на рисунке 2.3. Видно, что в пределе малого времени  $dt$  вектор  $d\tau$  параллелен вектору  $\vec{n}$ . Следовательно,  $d\tau = \vec{n}|d\tau|$ . Теперь остается найти модуль вектора  $d\tau$ . Для этого используем подобие треугольников, показанных на рисунке 2.3.



К вычислению нормального  
ускорения точки

Рис. 2.3.

Как видно из этого рисунка,

$$\frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{dr}{R}$$

Здесь  $dr$  - модуль перемещения материальной точки за время  $dt$ ,  $R$  - радиус кривизны траектории. По определению вектора  $\vec{\tau}$ ,  $|\vec{\tau}| = 1$ . Следовательно,

$$|d\vec{\tau}| = \frac{dr}{R}$$

Теперь

$$d\vec{\tau} = \vec{n} \frac{dr}{R}$$

и

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n} \frac{v}{R}$$

где  $\frac{dr}{dt} = v$  - модуль скорости точки. Окончательно,

$$\vec{a} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \vec{n} \frac{v^2}{R}$$

Сравнивая это выражение с выражением  $\vec{a} = \vec{\tau} a_\tau + \vec{n} a_n$ , находим

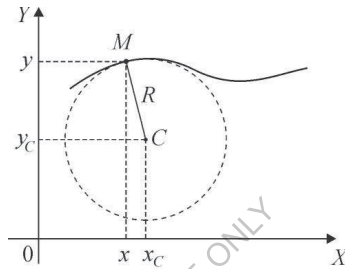
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

и

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Итак, тангенциальное ускорение материальной точки равно производной модуля скорости точки по времени, а нормальное ускорение равно отношению квадрата скорости точки к радиусу кривизны траектории.

Кривизна кривой, заданной в декартовых координатах. Пусть есть кривая на плоскости, которая описывается уравнением  $y = f(x)$ . Найдем радиус кривизны этой кривой в точке с координатой  $x$ . На рисунке 2.4 показан фрагмент заданной кривой, а также круг кривизны кривой в точке  $M$ .



К вычислению радиуса кривизны  
кривой  
Рис. 2.4.

Обозначим декартовы координаты точки  $M$  через  $x$  и  $y$ , координаты центра круга кривизны через  $x_c$  и  $y_c$ , радиус круга кривизны через  $R$ . Тогда уравнение круга кривизны можно представить в виде

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

В точке  $M$  должны выполняться соотношения

$$y(x) = f(x)$$

$$y'(x) = f'(x)$$

$$y''(x) = f''(x)$$

Здесь штрих обозначает производную функции по  $x$ . Дифференцируя уравнения круга кривизны по  $x$  один и два раза получим

$$(x - x_c) + (y - y_c)y' = 0$$

и

$$1 + (y')^2 + (y - y_c)y'' = 0$$

Отсюда

$$y - y_c = -\frac{1 + (y')^2}{y''}$$

$$x - x_c = \frac{1 + (y')^2}{y''} y'$$

и

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

В качестве примера рассмотрим параболу, которая описывается формулой  $y = ax^2$ . Применяя полученную формулу, найдем радиус кривизны параболы в ее вершине:  $R = 1/2a$ .

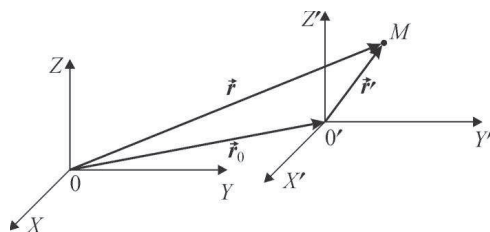
### 3. Относительность механического движения

Относительность механического движения. Правило сложения скоростей. Сложение ускорений.

Относительность механического движения. Движение одного и того же тела различно по отношению к разным телам отсчета. В этом состоит относительность механического движения. Например, движение точки на ободе автомобильного колеса различно по отношению к автомобилю и к дорожному полотну. В этом параграфе мы найдем связь кинематических характеристик точки по отношению к двум разным системам отсчета, одна из которых неподвижна, а другая движется. Будем считать, что движущаяся система отсчета совершает поступательное движение, при котором оси координат сохраняют свою ориентацию в пространстве. Более общий случай рассмотрим в параграфе 6.

Пусть  $\vec{r}$  радиус-вектор материальной точки  $M$  относительно неподвижной системы отсчета,  $\vec{r}'$  - радиус-вектор той же точки относительно подвижной системы отсчета, а  $\vec{r}_0$  - радиус-вектор начала отсчета подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Тогда, как видно из рисунка 3.1,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$



Радиус-векторы материальной точки относительно  
двух разных систем координат

Рис. 3.1.

Правило сложения скоростей. Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

Здесь  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  - скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета,  $\vec{v}_0 = d\vec{r}_0/dt$  - скорость начала отсчета подвижной системы отсчета относительно неподвижной,  $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt$  - скорость материальной точки относительно подвижной системы отсчета. Для краткости скорость  $\vec{v}$  называют абсолютной скоростью, скорость  $\vec{v}'$  - относительной скоростью, а скорость  $\vec{v}_0$  - скоростью системы отсчета. Полученная формула выражает правило сложения скоростей Галилея, согласно которому абсолютная скорость равна относительной скорости плюс скорость системы отсчета.

Сложение ускорений. Дифференцируя по времени равенство  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ , получим

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

Здесь  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  - ускорение материальной точки относительно неподвижной системы отсчета,  $\vec{a}_0 = d\vec{v}_0/dt$  - ускорение начала отсчета подвижной системы отсчета относительно неподвижной,  $\vec{a}' = d\vec{v}'/dt$  - ускорение материальной точки относительно подвижной системы отсчета. Для краткости ускорение  $\vec{a}$  называют абсолютным ускорением, ускорение  $\vec{a}'$  - относительным ускорением, а ускорение  $\vec{a}_0$  - ускорением системы отсчета. Полученная формула выражает правило сложения ускорений, согласно которому абсолютное ускорение равно относительному ускорению плюс ускорение системы отсчета.

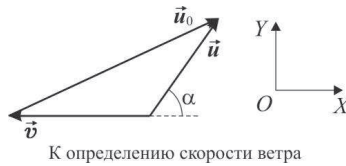
В качестве примера рассмотрим такую задачу. Корабль идет на запад со скоростью  $v = 6$  м/с. Известно, что ветер дует с юго-запада. Скорость ветра, измеренная на палубе корабля, равна  $u_0 = 8$  м/с. Найти скорость ветра  $u$  относительно земли.

Применяя правило сложения скоростей, можем записать

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{v}$$



Картина сложения векторов показана на рис. 3.2.



К определению скорости ветра

Рис. 3.2.

Здесь  $\alpha$  - угол, определяющий направление ветра относительно направления движения корабля. Как видно из этого рисунка,

$$(v + u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha)^2 = u_0^2$$

или

$$v^2 + u^2 + 2uv \cos \alpha = u_0^2$$

(теорема косинусов). Решая это уравнение относительно величины  $u$ , находим

$$u = -v \cos \alpha + \sqrt{u_0^2 - v^2 \sin^2 \alpha}$$

В данном случае  $\alpha = 45^\circ$ . Следовательно,

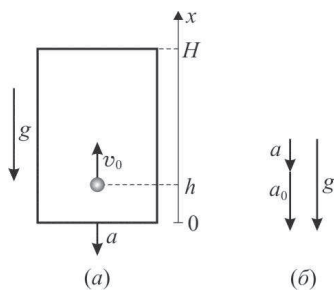
$$u = -\frac{v}{\sqrt{2}} + \sqrt{u_0^2 - \frac{v^2}{2}} = (\sqrt{46} - \sqrt{18}) \text{ м/с} \approx 3 \text{ м/с}$$

Еще один пример. В кабине лифта высотой  $H = 2.5$  м, движущейся с ускорением  $a = 0.8 \text{ м/с}^2$ , направленным вниз, с высоты  $h = 0.5$  м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью  $v_0$  относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

Рассмотрим движение шарика в системе отсчета, связанной с лифтом. Применяя правило сложения ускорений, запишем

$$\vec{g} = \vec{a}_0 + \vec{a}$$

Здесь  $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения шарика относительно земли,  $\vec{a}_0$  – вектор ускорения шарика относительно лифта,  $\vec{a}$  – вектор ускорения лифта относительно земли. Картина сложения векторов показана на рис. 3.3.



К определению скорости шарика

Рис. 3.3.

Как видно из этого рисунка, относительно лифта шарик движется с ускорением

$$a_0 = g - a$$

направленным вниз. Согласно законам прямолинейного равнопеременного движения (см. параграф 1)

$$H - h = v_0 t - \frac{a_0 t^2}{2}$$

и

$$v_0 - a_0 t = 0$$

Здесь  $t$  – время движения шарика от момента броска до касания потолка кабины. Решая эти уравнения, находим

$$v_0 = \sqrt{2(g - a)(H - h)} = 6 \text{ м/с}$$

#### 4. Кинематика твердого тела

Поступательное движение твердого тела. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость вращения тела. Скорость движения произвольной точки тела. Вектор угловой скорости. Векторное произведение векторов. Вектор скорости произвольной точки тела. Движение тела с одной неподвижной точкой. Мгновенная ось вращения тела.

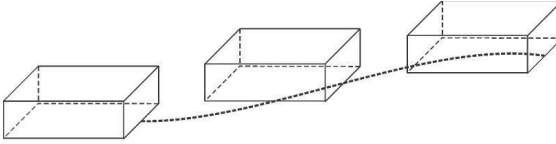
Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, расстояние между любой парой которых всегда остается неизменным. Иными словами, это тело, размер и форма которого в процессе движения не меняются. Рассмотрим основные типы движения твердого тела.

Поступательное движение твердого тела. Так называют движение, при котором ориентация тела в пространстве остается неизменной (рис. 4.1). При таком движении скорости всех точек тела одинаковы:

$$\vec{v}_i = \vec{v}$$

Ускорения всех точек тела также одинаковы:

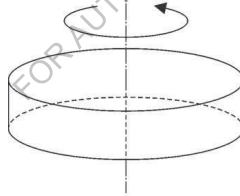
$$\vec{a}_i = \vec{a}$$



Пример поступательного перемещения твердого тела

Рис. 4.1.

Вращение тела вокруг неподвижной оси. Так называют движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис. 4.2). Ось вращения это прямая линия, на которой лежат неподвижные точки тела. При таком движении положение тела в пространстве полностью определяется углом поворота  $\varphi$  относительно некоторого заданного положения. Например, положение маятника, полностью характеризуется углом отклонения маятника от вертикали. Закон движения тела может быть представлен в виде  $\varphi = \varphi(t)$ . Условимся измерять угол  $\varphi$  в радианах (см. параграф 1).



Вращение твердого тела  
вокруг неподвижной оси

Рис. 4.2.

Угловая скорость вращения тела. Угловой скоростью вращения тела называется производная угла поворота тела по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду [рад/с] и коротко обозначается  $\omega = \dot{\varphi}$ .

Скорость движения произвольной точки тела. Скорость движения любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, выражается через угловую скорость формулой

$$v = \omega r_{\perp}$$

где  $r_{\perp}$  - расстояние от данной точки тела до оси вращения. В самом деле, модуль скорости точки определяется формулой  $v = \frac{dr}{dt}$ . Поскольку точка движется по окружности, ее перемещение за малое время  $dt$  будет примерно равно длине дуги окружности  $dS$ , которую проходит данная материальная точка тела за это же время. Указанная длина дуги, в свою очередь, равна  $r_{\perp}d\varphi$ , где  $d\varphi$  - угол поворота вектора, проведенного от оси вращения к данной точке тела. Таким образом, получаем

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt} = \frac{r_{\perp}d\varphi}{dt} = \omega r_{\perp}$$

Вектор угловой скорости. Это вектор  $\vec{\omega}$ , направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта и равный по модулю производной угла поворота тела по времени (рис. 4.3).



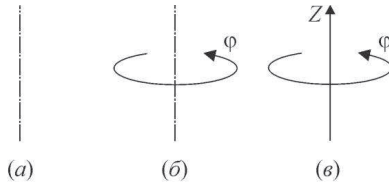
Вектор угловой скорости  
вращения тела

Рис. 4.3.

Проекция вектора угловой скорости на ось вращения тела определяется формулой

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}$$

Здесь направление оси  $z$  связано с направлением отсчета угла  $\varphi$  правилом правого винта (рис. 4.4).



Ось вращения тела (а),  
 выбор направления отсчета угла поворота (б),  
 выбор направления оси координат (в)

Рис. 4.4.

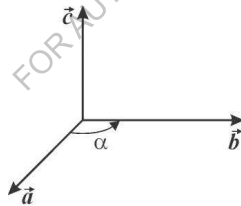
Векторное произведение векторов. Векторным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$

перпендикулярный обоим векторам сомножителям, направленный по правилу правого винта, и равный по модулю произведению модулей векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на синус угла между ними:

$$c = absin\alpha$$

Взаимная ориентация векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  показана на рисунке 4.5.



К понятию векторного  
 произведения векторов

Рис. 4.5.

В декартовых координатах векторное произведение выражается определителем

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

или

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{i} \cdot (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j} \cdot (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} \cdot (a_x b_y - a_y b_x)$$

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

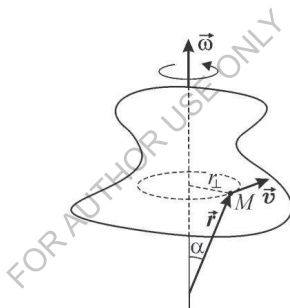
**Вектор скорости произвольной точки тела.** Вектор скорости произвольной точки тела можно представить как векторное произведение вектора угловой скорости на радиус-вектор точки:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

При этом предполагается, что начало отсчета расположено на оси вращения тела. Применяя правило правого винта, нетрудно убедиться, что эта формула правильно описывает направление вектора скорости (рис. 4.6). Вычисляя по ней модуль скорости точки, получим

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega r_{\perp}$$

что соответствует формуле, представленной выше. Таким образом, формула  $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$  правильно описывается как направление, так и величину скорости произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.



К вычислению вектора скорости произвольной точки тела, вращающегося около неподвижной оси  
Рис.4.6.

Отметим важное следствие формулы  $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ . Поскольку  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , ее можно представить в виде

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Подобно этому, скорость изменения любого вектора  $\vec{A}$ , жестко связанного с вращающейся системой отсчета, можно найти по формуле

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{A}]$$

Здесь  $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости вращающейся системы отсчета.

Движение тела с одной неподвижной точкой. Движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку закрепления. Это утверждение называют теоремой Эйлера.

Мгновенная ось вращения тела. В процессе движения тела с одной неподвижной точкой его ось вращения может менять свое направление как от относительно неподвижной системы отсчета, так и относительно самого тела. Поэтому она называется мгновенной осью вращения. Мгновенная ось вращения определяется как прямая линия, на которой лежат неподвижные в данный момент точки тела. Скорость движения произвольной точки тела по-прежнему выражается формулой

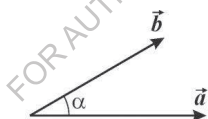
$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

где вектор  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$  направлен теперь вдоль мгновенной оси вращения тела.

## 5. Матрица поворота тела

Скалярное произведение векторов. Матрица поворота тела. Преобразование декартовых компонент вектора при повороте системы координат. Двойной поворот и матричное произведение.

Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними (рис. 5.1).



К понятию скалярного произведения векторов

Рис.5.1.

Скалярное произведение обозначается  $(\vec{a}, \vec{b})$  или просто  $\vec{a}\vec{b}$ . Таким образом,

$$(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vec{a}\vec{b} = abc\cos\alpha$$

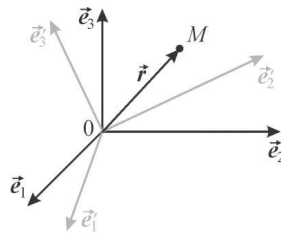
В декартовых координатах скалярное произведение выражается формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю.

Матрица поворота тела. Для описания положения твердого тела в пространстве, а также для описания поворота тела введем две системы координат: неподвижную

(лабораторную) систему с оортами  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  и систему, связанную с телом, – с оортами  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ . Общее начало обеих систем координат поместим в неподвижную точку тела (рис. 5.2).



Система оортов для описания поворота тела в пространстве  
Рис. 5.2.

Матрицей поворота тела называется матрица, составленная из скалярных произведений оортов двух координатных систем. Элемент этой матрицы можно представить в виде

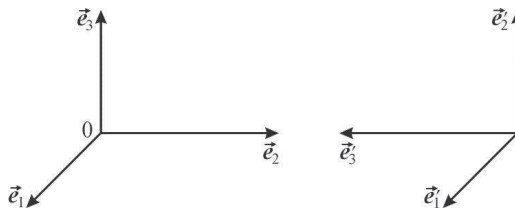
$$S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}'_j$$

Здесь индексы « $i$ » и « $j$ » пробегают значения 1, 2, 3. Таким образом, вся матрица целиком имеет вид

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \vec{e}'_1 & \vec{e}_1 \vec{e}'_2 & \vec{e}_1 \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_2 \vec{e}'_1 & \vec{e}_2 \vec{e}'_2 & \vec{e}_2 \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_3 \vec{e}'_1 & \vec{e}_3 \vec{e}'_2 & \vec{e}_3 \vec{e}'_3 \end{pmatrix}$$

Например, поворот тела вокруг оорта  $\vec{e}_1$  на 90 градусов по правилу правого винта (рис. 5.3) описывается матрицей

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



К вычислению матрицы поворота тела  
Рис.5.3.

Обратный поворот описывается матрицей



$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Такая матрица называется транспонированной по отношению к матрице прямого поворота  $\hat{S}$ .

Преобразование декартовых компонент вектора при повороте системы координат.

Отметим еще одно полезное свойство матрицы поворота. С ее помощью можно описать преобразование декартовых компонент вектора при повороте системы координат. Покажем это на примере радиус-вектора точки.

Пусть есть материальная точка и две системы координат, одна из которых повернута произвольным образом относительно другой. Радиус-вектор точки можно записать через орты обеих указанных систем следующим образом

$$\vec{r} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3 = \vec{e}'_1 x'_1 + \vec{e}'_2 x'_2 + \vec{e}'_3 x'_3$$

Умножим это векторное равенство скалярно на вектор  $\vec{e}_1$ . Получим

$$x_1 = \vec{e}_1 \vec{e}'_1 x'_1 + \vec{e}_1 \vec{e}'_2 x'_2 + \vec{e}_1 \vec{e}'_3 x'_3 = S_{11} x'_1 + S_{12} x'_2 + S_{13} x'_3$$

или

$$x_1 = \sum_{i=1}^3 S_{1i} x'_i$$

где  $S_{1i}$  – элементы матрицы, описывающей поворот одной координатной системы относительно другой. Аналогичным образом получаем формулы

$$x_2 = \sum_{i=1}^3 S_{2i} x'_i$$

и

$$x_3 = \sum_{i=1}^3 S_{3i} x'_i$$

Все эти формулы можно единообразно представить в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} x'_j$$

Здесь  $x_i$  – декартовы компоненты радиус-вектора точки в исходной системе координат,  $x'_j$  – декартовы компоненты этого же вектора в повернутой системе координат,  $S_{ij}$  – матрица поворота системы координат, индексы  $i$  и  $j$  пробегает значения 1, 2, 3. Отметим, что данное правило описывает преобразование декартовых компонент любого вектора при повороте системы координат.

Аналогичным образом получим формулу, описывающую обратное преобразование

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 S_{ji} x_j$$

или

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} x_j$$

Здесь, как и прежде,  $S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}'_j$ , и

$$T_{ij} = S_{ji}$$

матрица обратного поворота, которая является транспонированной по отношению к матрице прямого поворота  $S_{ij}$ .

Двойной поворот и матричное произведение. Итак, поворот твердого тела или системы координат в пространстве можно описать с помощью матрицы. Выполним последовательно два поворота системы координат, которые описываются соответственно матрицами  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ . В таком случае начальные  $x_1, x_2, x_3$ , промежуточные  $x'_1, x'_2, x'_3$  и конечные  $x''_1, x''_2, x''_3$  координаты некоторой точки  $M$  будут связаны между собой формулами

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} x_j$$

и

$$x''_k = \sum_{i=1}^3 B_{ki} x'_i$$

Подставив выражение для  $x'_i$  в формулу для  $x''_k$ , получим

$$x_k'' = \sum_{i=1}^3 B_{ki} \sum_{j=1}^3 A_{ij} x_j$$

Изменим порядок суммирования в этой формуле. Тогда

$$x_k'' = \sum_{j=1}^3 x_j \sum_{i=1}^3 B_{ki} A_{ij}$$

или

$$x_k'' = \sum_{j=1}^3 C_{kj} x_j$$

где матрица  $\hat{C}$  определена формулой

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^3 B_{ki} A_{ij}$$

Эта матрица называется матричным произведением матриц  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ . Более компактно операцию матричного умножения можно записать в виде

$$\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$$

Произведение матриц, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей, т.е. в общем случае

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

Это свойство называют некоммутативностью матричного произведения. В механике оно проявляется в том, что конечная ориентация твердого тела в пространстве зависит от последовательности его поворотов.

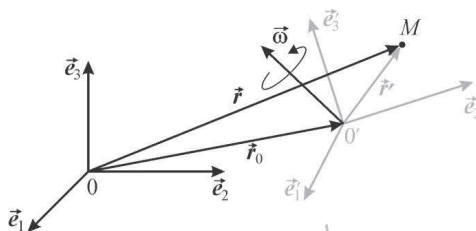
## 6. Кинематика вращающихся систем отсчета

Связь перемещений точки относительно неподвижной и вращающейся систем отсчета. Связь скоростей точки. Связь ускорений точки. Переносное и кориолисово ускорения. Центробежное ускорение.

Иногда удобно рассматривать физические явления относительно какой-нибудь вращающейся системы отсчета. Например, процессы вблизи поверхности Земли естественно рассматривать в системе отсчета, связанной с земной поверхностью. Известно, что эта система испытывает суточное вращение вокруг оси Земли, а сама Земля совершает годовое вращение вокруг Солнца. Возникает вопрос: какие особенности приобретают физические явления, если их рассматривать относительно вращающихся

систем отсчета? Анализ этого вопроса мы начнем с рассмотрения кинематики вращающихся систем. В этом параграфе мы выведем соотношения между кинематическими характеристиками материальной точки в двух системах отсчета – неподвижной и вращающейся.

Рассмотрим материальную точку  $M$  и две декартовы системы отсчета: неподвижную и вращающуюся (рис. 6.1). Орты неподвижной системы  $S$  обозначим  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , орты вращающейся системы  $S'$  обозначим  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ . Пусть  $\vec{r}$  радиус-вектор точки  $M$  в системе  $S$ ,  $\vec{r}'$  - радиус вектор этой же точки в системе  $S'$ ,  $\vec{r}_0$  - радиус-вектор начала подвижной системы отсчета относительно неподвижной,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения подвижной системы отсчета, которую мы будем считать, для простоты, постоянной.



Неподвижная и вращающаяся системы координат

Рис. 6.1

Радиус-векторы точки в неподвижной и вращающейся системах отсчета связаны соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

Связь перемещений точки относительно неподвижной и вращающейся систем отсчета.

Возьмем дифференциал от правой и левой частей этой формулы. Получим

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$$

Здесь  $d\vec{r}'$  - приращение вектора  $\vec{r}'$  относительно неподвижной системы отсчета. Приращение вектора  $\vec{r}'$  относительно вращающейся системы обозначим иначе, а именно, как  $d'\vec{r}'$ . Найдем связь между векторами  $d\vec{r}'$  и  $d'\vec{r}'$ . Для этого запишем вектор  $\vec{r}'$  через орты вращающейся системы отсчета:

$$\vec{r}' = \vec{e}'_1 x'_1 + \vec{e}'_2 x'_2 + \vec{e}'_3 x'_3$$

Теперь вычислим дифференциал этого вектора, принимая во внимание, что орты вращающейся системы отсчета меняют свое положение относительно неподвижной системы с течением времени. Получим

$$d\vec{r}' = \vec{e}'_1 dx'_1 + \vec{e}'_2 dx'_2 + \vec{e}'_3 dx'_3 + x'_1 d\vec{e}'_1 + x'_2 d\vec{e}'_2 + x'_3 d\vec{e}'_3$$

Теперь вычислим приращения ортов вращающейся системы отсчета  $d\vec{e}'_1$ ,  $d\vec{e}'_2$ ,  $d\vec{e}'_3$  относительно неподвижной системы. Поскольку орты представляют собой векторы, жестко связанные с вращающейся системой отсчета, их приращения можно найти по формулам (см. параграф 4):

$$d\vec{e}'_1 = [\vec{\omega}, \vec{e}'_1]dt, \quad d\vec{e}'_2 = [\vec{\omega}, \vec{e}'_2]dt, \quad d\vec{e}'_3 = [\vec{\omega}, \vec{e}'_3]dt$$

Следовательно,

$$d\vec{r}' = \vec{e}'_1 dx'_1 + \vec{e}'_2 dx'_2 + \vec{e}'_3 dx'_3 + x'_1 [\vec{\omega}, \vec{e}'_1]dt + x'_2 [\vec{\omega}, \vec{e}'_2]dt + x'_3 [\vec{\omega}, \vec{e}'_3]dt$$

или

$$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']dt$$

Отсюда

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']dt$$

Такова связь перемещений материальной точки в неподвижной и вращающейся системах отсчета.

Связь скоростей точки. Разделим правую и левую части формулы

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']dt$$

на промежутки времени  $dt$ . Получим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']$$

Эта формула определяет связь скоростей материальной точки относительно неподвижной и вращающейся систем отсчета. Здесь  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  - скорость точки относительно неподвижной системы отсчета,  $\vec{v}' = d'\vec{r}'/dt$  - скорость точки относительно вращающейся системы отсчета,  $\vec{v}_0 = d\vec{r}_0/dt$  - скорость начала отсчета подвижной системы относительно неподвижной,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения подвижной системы отсчета,  $\vec{r}'$  - радиус-вектор точки относительно подвижной системы отсчета. В частных случаях эта формула переходит в правило сложения скоростей Галилея или в формулу, описывающую вращение точки вокруг неподвижной оси.

Связь ускорений точки. Возьмем дифференциал от правой и левой частей формулы  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']$ . Получим

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d\vec{v}' + [\vec{\omega}, d\vec{r}']$$

Здесь учтено, что  $\vec{\omega} = const$ . Представим вектор  $\vec{v}'$  в виде

$$\vec{v}' = \vec{e}'_1 \dot{x}'_1 + \vec{e}'_2 \dot{x}'_2 + \vec{e}'_3 \dot{x}'_3$$

Действуя как при вычислении вектора  $d\vec{r}'$ , получим

$$d\vec{v}' = d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']dt$$

Здесь  $d'\vec{v}'$  - приращение вектора  $\vec{v}'$  относительно неподвижной системы отсчета,  $d'\vec{v}'$  - приращение скорости точки относительно вращающейся системы отсчета. Следовательно,

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']dt + [\vec{\omega}, d'\vec{r}'] + [\vec{\omega}, \vec{r}']dt$$

или

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']dt + [\vec{\omega}, d'\vec{r}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']dt]$$

Разделим правую и левую части этой формулы на время  $dt$ . Получим

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$$

Такова связь ускорений материальной точки относительно неподвижной и вращающейся систем отсчета. Здесь  $\vec{a}$  - ускорение точки относительно неподвижной системы отсчета (абсолютное ускорение),  $\vec{a}'$  - ускорение точки относительно движущейся системы отсчета (относительное ускорение),  $\vec{a}_0$  - ускорение начала отсчета движущейся системы отсчета относительно неподвижной,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения движущейся системы отсчета,  $\vec{r}'$  - радиус-вектор точки относительно движущейся системы отсчета,  $\vec{v}'$  - вектор скорости точки относительно движущейся системы отсчета, квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов.

Переносное и кориолисово ускорения. Формулу для абсолютного ускорения точки можно представить в виде

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k$$

где

$$\vec{a}_n = \vec{a}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$$

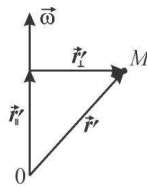
- переносное ускорение,

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

- кориолисово ускорение точки. Переносное ускорение имеет смысл ускорения точки, жестко связанной с вращающейся системой отсчета. Кориолисово ускорение возникает, если точка движется относительно вращающейся системы отсчета.

Центростремительное ускорение. Преобразуем выражение для переносного ускорения точки. Для этого разложим радиус-вектор точки относительно вращающейся системы отсчета  $\vec{r}'$  на компоненты параллельную  $\vec{r}'_{\parallel}$  и перпендикулярную  $\vec{r}'_{\perp}$  оси вращения вращающейся системы отсчета (рис. 6.2):

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$$



Составляющие радиус-вектора точки относительно вращающейся системы координат  
Рис. 6.2.

Тогда

$$[\vec{\omega}, \vec{r}'] = [\vec{\omega}, \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}] = [\vec{\omega}, \vec{r}'_{\parallel}] + [\vec{\omega}, \vec{r}'_{\perp}] = [\vec{\omega}, \vec{r}'_{\perp}]$$

Далее, раскроем двойное векторное произведение по формуле

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

Тогда

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}'_{\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}'_{\perp}) - \vec{r}'_{\perp}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\vec{r}'_{\perp}\omega^2$$

Это ускорение называют центростремительным ускорением точки:

$$\vec{a}_{\text{цс}} = -\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

Здесь  $\omega$  - угловая скорость вращения подвижной системы отсчета,  $\vec{r}'_{\perp}$  - составляющая радиус-вектора точки относительно вращающейся системы отсчета, перпендикулярная оси вращения этой системы. Как видно из этой формулы, вектор  $\vec{a}_{\text{цс}}$  направлен от материальной точки к оси вращения вращающейся системы отсчета. Окончательное выражение для вектора ускорения точки представим в виде

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{цс}} + \vec{a}_{\text{к}}$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}'_{\perp} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

Здесь  $\vec{a}$  - ускорение точки относительно неподвижной системы отсчета (абсолютное ускорение),  $\vec{a}'$  - ускорение точки относительно движущейся системы отсчета (относительное ускорение),  $\vec{a}_0$  - ускорение начала отсчета движущейся системы отсчета относительно неподвижной,  $\vec{a}_{\text{цс}} = -\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$  - центростремительное ускорение точки,  $\vec{a}_{\text{к}} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$  - кориолисово ускорение точки,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения движущейся системы отсчета,  $\vec{v}'$  - вектор скорости точки относительно движущейся системы отсчета,  $\vec{r}'_{\perp}$  - составляющая радиус-вектора точки относительно вращающейся системы отсчета, перпендикулярная оси вращения этой системы.

## 7. Законы Ньютона

Первый закон Ньютона. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Сила и масса. Измерение сил и масс. Сложение сил.

**Первый закон Ньютона:** Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.

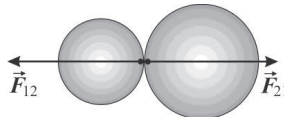
**Второй закон Ньютона:** произведение массы материальной точки на ускорение равно действующей на нее силе:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

**Третий закон Ньютона:** действия двух тел друг на друга равны и противоположно направлены:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Силы взаимодействия приложены к разным телам, направлены вдоль одной прямой, и имеют одинаковую природу (рис. 7.1).



Силы взаимодействия тел

Рис. 7.1.

Эти законы были опубликованы в 1687 году в книге Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии». Как и все фундаментальные законы природы, законы



Ньютона являются обобщением опытных данных. Такие данные были получены Галилеем, который изучал свободное падение тел и движение тел по наклонной плоскости; Гюйгенсом, который изучал колебания маятников и вращения тел; Кеплером, который обобщил результаты наблюдений за движением планет Солнечной системы.

Сила и масса. Законы Ньютона вводят фундаментальные физические понятия – силу и массу. Масса определяется как мера отклика тела на действие силы. Сила есть мера действия на данное тело других тел.

Измерение сил и масс. Для того чтобы измерить силу и массу нужно ввести единицы измерения. Единица измерения массы – 1 килограмм ( $кг$ ). Согласно современному определению, это масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты. Единица измерения силы – 1 ньютон ( $H$ ). Это сила, вызывающая ускорение в  $1 м/с^2$  у тела массой в 1 килограмм (рис. 7.2а):

$$H = кг \cdot м/с^2$$

Для того чтобы измерить массу произвольного тела, подействуем на него силой в  $1H$  и измерим ускорение тела (рис. 7.2б). Обозначим полученную величину ускорения  $a_1$ . После этого массу тела найдем по формуле

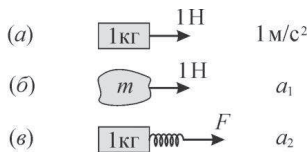
$$m = \frac{1H}{a_1}$$

Например, если  $a_1 = 2 м/с^2$ , то  $m = 0.5 кг$ .

Для того чтобы измерить силу, подействуем этой силой на тело массой в  $1кг$  и измерим ускорение тела (рис. 7.2в). Обозначим полученную величину ускорения  $a_2$ . После этого силу найдем по формуле

$$F = 1кг \cdot a_2$$

Например, если  $a_2 = 3 м/с^2$ , то  $F = 3 H$ .



Определение эталона силы (а);  
измерение массы (б);  
измерение силы (в)

Рис. 7.2.

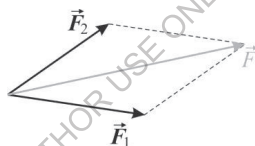
Законы Ньютона правильно описывают движение огромного множества тел: начиная от движения молекул и кончая движением планет. Эти законы перестают работать только в двух случаях. Первый – это движение тел с очень большими скоростями (близкими к скорости света). Второй – движение очень маленьких тел в очень малых областях пространства (электрон в атоме). Эти два случая описываются уже не классической механикой, а другими науками – теорией относительности и квантовой механикой.

Сложение сил. Опыт показывает, что если на материальную точку одновременно действуют две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , то она начинает двигаться так, как если бы действовала одна сила  $\vec{F}$ , равная векторной сумме первых двух сил (рис. 7.3). Это правило выражается формулой

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

или, в случае большего числа сил

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i$$



Сложение сил  
Рис. 7.3.

## 8. Силы в механике

Гравитационные силы. Закон всемирного тяготения. Принцип суперпозиции. Притяжение материальной точки к шару. Сила упругости. Закон Гука. Коэффициент упругости пружины. Динамометр. Модуль Юнга. Сила трения. Трение покоя. Сила нормального давления. Коэффициент трения. Трение скольжения. Вязкое трение.

Гравитационные силы. Эти силы определяют вес тел вблизи поверхности Земли, движение планет Солнечной системы, движение Луны вокруг Земли, а также движение искусственных спутников Земли. Основным законом гравитационных сил носит название закона всемирного тяготения.

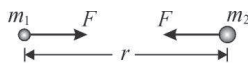
Закон всемирного тяготения: любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними (рис. 8.1):

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Здесь  $F$  сила притяжения,  $m_1$  и  $m_2$  - массы материальных точек,  $r$  - расстояние между ними. Величина

$$G = 6.6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

называется гравитационной постоянной.



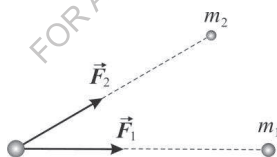
Притяжение материальных точек  
Рис. 8.1.

Второй закон, которому подчиняются гравитационные силы, называется принципом суперпозиции.

Принцип суперпозиции: каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как если бы других частиц не было. Математически этот закон выражается формулой

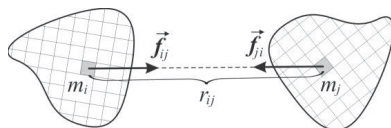
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Она означает, что гравитационная сила, действующую на данную частицу со стороны произвольной системы частиц, равна векторной сумме сил, приложенных со стороны отдельных частиц системы (рис. 8.2).



Принцип суперпозиции  
Рис. 8.2.

Притяжение материальной точки к шару. Закон всемирного тяготения и принцип суперпозиции позволяют рассчитать гравитационные силы для любой заданной системы тел. Схема расчета сил притяжения для тел произвольной формы показана на рисунке (8.3).



К вычислению силы притяжения тел  
Рис. 8.3.

Каждое тело представляем как совокупность маленьких элементов – материальных точек. Вычисляем силу притяжения для отдельной пары таких точек

$$\vec{f}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

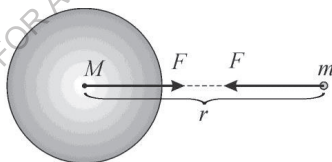
Здесь  $m_i$  – масса частицы первого тела,  $m_j$  – масса частицы второго тела  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  – вектор, проведенный от одной частицы другой,  $r_{ij}$  – модуль этого вектора. Затем суммируем элементарные силы притяжения и находим полную силу притяжения для данных двух тел:

$$\vec{f} = \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij}$$

Важный пример такого взаимодействия – притяжение точки к шару. Расчет показывает, что однородный шар притягивает материальную точку так, как если бы вся масса шара находилась в его центре (рис. 8.4). Сила притяжения точки к шару выражается формулой

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Здесь  $M$  – масса шара,  $m$  – масса точки,  $r$  – расстояние от точки до центра шара. Подробный вывод этой формулы дан в параграфе 9.



Притяжение материальной точки к шару  
Рис. 8.4.

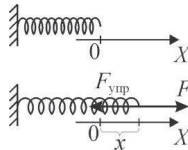
Сила упругости. Это сила, препятствующая деформации упругих тел. Упругим называется тело, восстанавливающее свою форму после прекращения действия силы. Таким телом является, например, пружина. Упругостью обладают газы, жидкости и твердые тела.

Закон Гука. Согласно этому закону, сила упругости пропорциональна величине деформации упругого тела. Заметим, что закон Гука это не фундаментальный закон природы, а приближенное соотношение, верное при не слишком больших деформациях упругого тела.

Коэффициент упругости пружины. Сила упругости пружины выражается формулой

$$F_x = -kx$$

Здесь  $x$  – величина деформации (приращение длины пружины в направлении действия внешней силы),  $F_x$  – сила упругости,  $k$  – коэффициент упругости пружины, имеющий размерность [Н/м]. Знак минус в этой формуле указывает на то, что сила упругости направлена противоположно внешней силе, вызывающей деформацию пружины (рис. 8.5).



Сила упругости  
Рис. 8.5.

Динамометр. Простая зависимость силы упругости от деформации дает возможность измерения силы с помощью пружины. Прибор, работающий на этом принципе, называется динамометром.

Модуль Юнга. Упругие свойства материалов характеризуют величиной, называемой модулем Юнга. Это понятие вводится следующим образом. Из определенного материала изготавливают образец длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ . К этому телу прикладывают внешнюю силу  $F$ , и измеряют величину деформации  $\Delta l$ . Опыт показывает, что при не слишком больших деформациях относительная деформация тела  $\varepsilon = \Delta l/l$  пропорциональна механическому напряжению  $\sigma = F/S$ . Коэффициент пропорциональности между этими величинами зависит только от самого материала. Он и называется модулем Юнга  $E$ . Итак,

$$\sigma = E\varepsilon$$

Относительная деформация тела безразмерна. Механическое напряжение и модуль Юнга измеряются в Н/м<sup>2</sup>. Эта единица называется паскаль (Па). Итак,

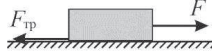
$$\text{Па} = \text{Н/м}^2$$

Сила трения. Это сила, препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел. Действие этой силы легко испытать, если сжать ладони и попытаться сдвинуть одну ладонь относительно другой.

Трение покоя. Это трение в отсутствие относительного перемещения соприкасающихся тел. В состоянии покоя сумма сил, действующих на тело, равна нулю. Поэтому закон трения покоя выражается формулой  $\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0$  или

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}$$

Здесь  $\vec{F}$  – внешняя сила, параллельная поверхности соприкосновения тел,  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – сила трения покоя (рис. 8.6).



Сила трения

Рис. 8.6.

Опыт показывает, что сила трения покоя ограничена сверху некоторой величиной:

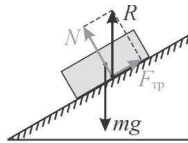
$$F_{\text{тр}} \leq F_{\text{max}}$$

При этом максимальная сила трения покоя зависит от того, насколько сильно прижаты друг к другу тела. Для описания этого эффекта вводят понятие силы нормального давления.

Сила нормального давления. Так называют составляющую силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярную поверхности соприкосновения. Обозначим эту силу буквой  $N$ .

В качестве примера рассмотрим тело, лежащее на наклонной плоскости (рис. 8.7). На это тело действует сила тяжести, равная  $mg$  и направленная по вертикали вниз. Еще одна сила, приложенная к телу – это сила  $\vec{R}$ , действующая на него со стороны плоскости. Эта сила называется силой реакции. Поскольку тело находится в состоянии покоя, сумма действующих на него сил равна нулю:  $m\vec{g} + \vec{R} = 0$ . Отсюда следует, что  $\vec{R} = -m\vec{g}$ , т.е. сила реакции направлена по вертикали вверх и равна по модулю силе тяжести.

В общем случае силу реакции можно разложить на две составляющие, одна из которых параллельна поверхности соприкосновения, а другая – перпендикулярна этой поверхности. Первая из этих сил представляет собой силу трения, а вторая – силу нормального давления.



Сила реакции  $R$ ,  
сила нормального давления  $N$   
и сила трения  $F_{\text{тр}}$

Рис. 8.7.

Если поверхность соприкосновения абсолютно гладкая, то сила трения отсутствует. В этом случае сила реакции перпендикулярна поверхности соприкосновения тел.

Коэффициент трения. Опыт показывает, что максимальная сила трения покоя пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{max} = \mu N$$

Величина  $\mu$  в этой формуле называется коэффициентом трения. И так, коэффициент трения это коэффициент пропорциональности между максимальной силой трения покоя и силой нормального давления. Этот коэффициент безразмерен и зависит от типа соприкасающихся поверхностей.

Коэффициент трения можно измерить следующим образом. Положим тело на наклонную плоскость и будем увеличивать угол наклона плоскости до тех пор, пока тело не начнет скользить вниз. Полученный таким образом критический угол наклона плоскости  $\alpha$  связан с коэффициентом трения соотношением  $\mu = tg\alpha$ .

Трение скольжения. Это трение при наличии относительного перемещения соприкасающихся тел. Опыт показывает, что сила трения скольжения приблизительно равна максимальной силе трения покоя:

$$F_{тр} = \mu N$$

Поэтому величину  $\mu$  называют также коэффициентом трения скольжения.

Вязкое трение. Это трение, препятствующее движению тела в сплошной среде. Вязкое трение имеет характерные особенности. А именно, в случае вязкого трения нет такого явления как трения покоя. Кроме того, сила вязкого трения зависит от скорости движения тела. Опыт показывает, что при не слишком больших скоростях движения тел сила вязкого трения пропорциональна скорости движения тела:

$$F_{тр} \sim v$$

## 9. Притяжение материальной точки к шару

Притяжение материальной точки к кольцу. Притяжение материальной точки к диску. Притяжение материальной точки к шару.

Вычислим силу притяжения материальной точки к однородному шару. Для этого используем закон всемирного тяготения и принцип суперпозиции. Представим шар как совокупность дисков, диск как совокупность колец, а кольцо как совокупность маленьких элементов – материальных точек. Вычислим последовательно силу притяжения материальной точки сначала к кольцу, затем к диску и, наконец, к шару. Каждая из этих операций представляет собой суммирование элементарных сил тяготения и математически выражается интегрированием.

Притяжение материальной точки к кольцу. Сначала вычислим силу притяжения материальной точки к кольцу. Будем считать, что материальная точка массы  $m$

расположена на оси симметрии кольца массы  $M$  и радиуса  $R$  на расстоянии  $z$  от центра кольца. Согласно закону всемирного тяготения материальная точка притягивается к элементу кольца массы  $dM$  с силой

$$dF = G \frac{mdM}{R^2 + z^2}$$

Эта сила направлена по линии, соединяющей материальную точку с элементом кольца. Составляющая этой силы, направленная вдоль оси симметрии кольца

$$dF_z = dF \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Теперь нужно просуммировать элементарные силы тяготения по всем элементам кольца. В силу симметрии рассматриваемой системы полная сила притяжения точки к кольцу будет направлена к центру кольца. Эту силу найдем путем интегрирования

$$F_z = \int dF_z$$

Таким образом

$$F_z = Gm \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dM = GMm \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Итак, сила притяжения материальной точки к кольцу выражается формулой

$$F = GMm \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Здесь  $G$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса кольца,  $m$  – масса материальной точки,  $R$  – радиус кольца,  $z$  – расстояние от материальной точки до центра кольца. Предполагается, что материальная точка лежит на оси симметрии кольца.

Притяжение материальной точки к диску. Теперь вычислим силу притяжения материальной точки к диску. Для этого представим диск как систему концентрических колец. Выделим кольцо радиуса  $r$  и малой ширины  $dr$ . Площадь этого кольца

$$dS = 2\pi r dr$$

а его масса

$$dM = M \frac{dS}{S}$$



где  $M$  – масса диска,  $S = \pi R^2$  – площадь диска,  $R$  – его радиус. Используя формулу, полученную выше, силу притяжения материальной точки к кольцу представим в виде

$$dF = Gm \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dM$$

или

$$dF = 2G \frac{Mm}{R^2} z \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Теперь просуммируем такие элементарные силы по всем кольцам диска. Для этого вычислим интеграл

$$F = \int dF$$

Получим

$$F = 2G \frac{Mm}{R^2} z \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

или

$$F = 2G \frac{Mm}{R^2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Здесь  $G$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса диска,  $m$  – масса материальной точки,  $R$  – радиус диска,  $z$  – расстояние от материальной точки до центра диска. Предполагается, что материальная точка лежит на оси симметрии диска.

Притяжение материальной точки к шару. Перейдем к вычислению силы притяжения материальной точки к шару. Обозначим массу материальной точки  $m$ , массу шара  $M$ , его радиус  $R$ , расстояние от материальной точки до центра шара  $l$ . Представим шар как систему коаксиальных дисков с осью симметрии на линии, проведенной от материальной точки к центру шара. Выделим один из таких дисков. Обозначим его радиус  $r$ , а толщину  $dz$ . Тогда

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

где  $z$  – расстояние от центра диска до центра шара. Масса диска

$$dM = \rho dV$$

где

$$\rho = \frac{M}{V}$$

плотность шара,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

объем шара,

$$dV = \pi r^2 dz$$

объем диска. Используя результат, полученный выше, силу притяжения материальной точки к рассматриваемому диску запишем в виде

$$dF = 2G \frac{m}{r^2} \left( 1 - \frac{l-z}{\sqrt{r^2 + (l-z)^2}} \right) dM$$

или

$$dF = 2\pi G m \rho \cdot \left( 1 - \frac{l-z}{\sqrt{R^2 - z^2 + (l-z)^2}} \right) dz$$

Теперь просуммируем такие элементарные силы притяжения. Для этого вычислим интеграл

$$F = \int dF$$

Получим

$$F = 2\pi G m \rho \int_{-R}^R \left( 1 - \frac{l-z}{\sqrt{R^2 - z^2 + (l-z)^2}} \right) dz$$

или

$$F = G \frac{Mm}{l^2}$$

Эта формула показывает, что однородный шар притягивает материальную точку так, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

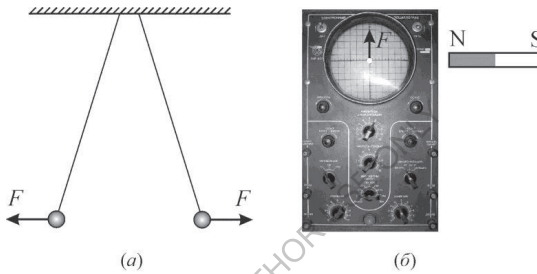
## 10. Электромагнитные силы

Электрические силы. Магнитные силы. Сила Лоренца.

К числу фундаментальных сил природы относится сила, действующая на заряженную частицу в электромагнитном поле. Эта сила, называемая силой Лоренца, выражается формулой

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Здесь  $q$  – заряд частицы,  $\vec{v}$  – ее скорость,  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{B}$  – магнитная индукция. Квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов. Действие электромагнитных сил можно наблюдать в опытах, показанных на рисунке 10.1.



Электромагнитные силы.

Два шарика, натертые шерстью, отталкиваются друг от друга (а);

Электронный пучок на экране осциллографа смещается под действием магнитного поля полосового магнита (б)

Рис. 10.1

**Электрические силы.** Два шарика из янтаря, натертые шерстью, отталкиваются друг от друга (рис. 10.1а). Взаимодействие такого типа называют электрическим. Для его характеристики вводят понятие электрического заряда, определяемого как мера электрического взаимодействия тел. В системе СИ электрический заряд измеряется в кулонах ( $Kл$ ). Один кулон это заряд, который протекает через поперечное сечение проводника за одну секунду при силе тока в проводнике в один ампер.

Заряженные тела могут не только отталкиваться, но и притягиваться друг к другу. При соединении заряженных тел электрический заряд может исчезать. Для характеристики этих свойств вводят понятия положительных и отрицательных зарядов. Одноименными называют заряды, которые отталкиваются друг от друга, а разноименными – заряды, которые притягиваются друг к другу. Условились считать положительным заряд стекла, натертого кожей, и отрицательным – заряд янтаря, натертого шерстью.

Опытным путем установлено, что электрический заряд тела не может быть сколь угодно малым (Милликен, 1916). Минимальный заряд, который может иметь заряженное тело, называют элементарным зарядом. Этот заряд равен

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Элементарные частицы – электрон и протон – обладают зарядом, равным элементарному. При этом протон заряжен положительно, а электрон – отрицательно.

Заряженные тела взаимодействуют на расстоянии. В пространстве между ними существует электрическое поле. Именно оно действует непосредственно на каждое из заряженных тел. Электрическим называют поле, создаваемое электрическими зарядами, и проявляющее себя действием на электрические заряды.

Электрическое поле характеризуется напряженностью. Напряженность поля есть мера действия поля на заряд. Она определяется как отношение силы, действующей на заряд со стороны поля, к величине заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Единица измерения напряженности электрического поля – Н/Кл.

Заряженное тело, размерами которого можно пренебречь, называют точечным зарядом. Иными словами – точечный заряд это заряженная материальная точка. Как и любую материальную точку, точечный заряд можно характеризовать координатами в пространстве, радиус-вектором, вектором скорости и вектором ускорения.

Согласно закону Кулона, два точечных электрических заряда взаимодействуют с силой, пропорциональной величинам зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Эта сила направлена по линии, соединяющей заряды, и является силой притяжения для разноименных зарядов и силой отталкивания для одноименных зарядов. Здесь

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$$

- электрическая постоянная. На основе закона Кулона вычисляется напряженность электрического поля неподвижного точечного заряда, которая определяется формулой

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{r^2}$$

Здесь  $q$  – величина заряда,  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от заряда в точку наблюдения поля,  $r$  – модуль вектора  $\vec{r}$ .

Электрическое поле подчиняется принципу суперпозиции. Согласно этому принципу, каждая пара заряженных частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как если бы других частиц не было. Напряженность электрического поля в любой точке пространства равна

сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке отдельными точечными зарядами:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Рассмотрим точечный заряд в электрическом поле. Пусть  $q$  – величина заряда,  $\vec{r}$  – его радиус-вектор,  $\vec{E}(\vec{r})$  – напряженность электрического поля. Тогда силу, действующую на заряд со стороны электрического поля, можно записать в виде

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Магнитные силы. Опыт показывает, что проводники с током действуют друг на друга с определенными силами. В частности, параллельные токи притягиваются, а антипараллельные отталкиваются друг от друга. Взаимодействие такого типа называют магнитным.

На основе магнитного взаимодействия вводят понятие силы тока и единицы силы тока – ампер. Один ампер (А) это сила постоянного тока, при протекании которого по двум параллельным проводам, расположенным в вакууме на расстоянии метр друг от друга, между ними возникает сила взаимодействия, равная  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины проводников.

Проводники с током взаимодействуют на расстоянии. В пространстве между ними существует магнитное поле. Именно оно действует непосредственно на каждый из проводников с током. Магнитным называют поле, создаваемое электрическими токами, и проявляющее себя действием на электрические токи.

Для характеристики магнитного поля вводят понятие магнитной индукции  $\vec{B}$ . За направление вектора  $\vec{B}$  принимают направление нормали к рамке с током, свободно ориентирующейся в магнитном поле, и выбранное по правилу правого винта. Величина магнитной индукции определяется по формуле

$$B = \frac{F}{Il}$$

Здесь  $F$  – сила, действующая со стороны магнитного поля на участок прямого проводника длиной  $l$ , по которому протекает ток силы  $I$ , при условии, что проводник перпендикулярен вектору  $\vec{B}$ .

Единица измерения магнитной индукции называется тесла (Тл). Одна тесла это магнитная индукция поля, которое действует с силой в один ньютон на участок прямого проводника длиной в один метр, по которому протекает ток в один ампер, при условии, что проводник перпендикулярен вектору магнитной индукции.

Согласно закону Ампера, на элемент проводника с током в магнитном поле действует сила, определяемая формулой

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$$

Здесь  $I$  – сила тока в проводнике,  $d\vec{l}$  – элементарный вектор, направленный вдоль проводника с током,  $\vec{B}$  – магнитная индукция.

Согласно закону Био – Савара, элемент проводника с током создает в пространстве магнитное поле, магнитная индукция которого определяется формулой

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

Здесь  $I$  – сила тока в проводнике,  $d\vec{l}$  – элементарный вектор, направленный вдоль проводника с током,  $\vec{r}$  – вектор, проведенный от элемента проводника с током в точку наблюдения поля,  $r$  – модуль вектора  $\vec{r}$ . Квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов. Величина

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{А}}$$

называется магнитной постоянной.

Магнитное поле подчиняется принципу суперпозиции. Согласно этому принципу отдельные элементы проводника с током создают магнитные поля независимо друг от друга. Магнитная индукция в любой точке пространства равна сумме магнитных индукций, создаваемых в этой точке отдельными элементами проводника с током:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

Электрический ток представляет собой направленное движение заряженных частиц. Сила тока равна отношению заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника, к промежутку времени

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Представим ток как поток идентичных точечных заряженных частиц. Тогда величину  $I d\vec{l}$ , входящую в выражение для силы Ампера, можно представить в виде

$$I d\vec{l} = q \vec{v} dN$$

Здесь  $q$  – заряд отдельной частицы,  $\vec{v}$  – ее скорость,  $dN$  – число частиц в элементе проводника длиной  $dl$ . Отсюда следует, что на отдельную частицу со стороны магнитного поля действует сила

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Действие этой силы можно наблюдать в опыте с электронной лучевой трубкой и магнитом (рис. 10.16).

Сила Лоренца. Если помимо магнитного поля на частицу действует электрическое поле, то полная сила, действующая на движущуюся заряженную частицу со стороны электромагнитного поля, описывается формулой

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Эта сила называется силой Лоренца.

## 11. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета. Сила инерции. Переносная, центробежная и кориолисова силы инерции. Особенности сил инерции. Невесомость и перегрузка. Маятник Фуко. Центрифуга.

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Инерциальной называется система отсчета, относительно которой всякое тело, бесконечно удаленное от других тел, не испытывает ускорения. Опыт показывает, что система отсчета, связанная с поверхностью Земли, является инерциальной – по крайней мере, приближенно. Неинерциальными являются системы отсчета, движущиеся с ускорениями относительно поверхности Земли (тормозящий автобус, карусель). В таких системах отсчета на тела действуют добавочные силы, называемые силами инерции.

Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета. Пусть есть две системы отсчета – инерциальная система  $S$  и неинерциальная система  $S'$ . Рассмотрим движение материальной точки относительно этих двух систем. В инерциальной системе движение точки подчиняется второму закону Ньютона и описывается уравнением

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Здесь  $m$  – масса материальной точки,  $\vec{a}$  – ее ускорение относительно инерциальной системы отсчета,  $\vec{F}$  – действующая на нее сила. Выведем аналогичное уравнение для неинерциальной системы отсчета.

Пусть ускорение материальной точки относительно данной неинерциальной системы  $S'$  равно  $\vec{a}'$ . Тогда можно записать

$$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F}$$

или

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$$

где

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$$

Эта формула выражает добавочную силу, действующую на материальную точку в неинерциальной системе отсчета. Она называется силой инерции.

Сила инерции. Это добавочная сила, действующая на материальную точку в неинерциальной системе отсчета, и определяемая формулой

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$$

Здесь  $m$  - масса материальной точки,  $\vec{a}$  - ее ускорение относительно какой-либо инерциальной системы отсчета,  $\vec{a}'$  - ускорение точки относительно данной неинерциальной системы отсчета.

Переносная, центробежная и кориолисова силы инерции. Для того, чтобы вычислить силу инерции, воспользуемся результатами параграфа 6, посвященного кинематике сложного движения. Как показано в этом параграфе,

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}'_{\perp} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

Следовательно,

$$\vec{a} - \vec{a}' = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}'_{\perp} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

и

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{r}'_{\perp} - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

Отдельные слагаемые в этой формуле называются переносной, центробежной и кориолисовой силами инерции. А именно,

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{п}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{к}}$$

Здесь

$$\vec{F}_{\text{п}} = -m\vec{a}_0$$

- переносная сила инерции,

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

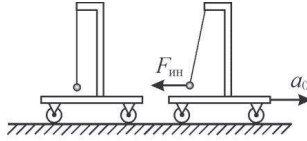
- центробежная сила инерции,



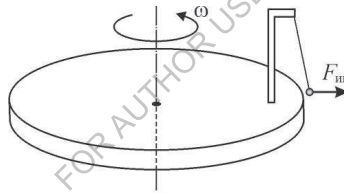
$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

- кориолисова сила инерции. Остальные обозначения таковы:  $\vec{a}_0$  - ускорение начала отсчета движущейся системы отсчета относительно неподвижной,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения движущейся системы отсчета,  $\vec{v}'$  - вектор скорости точки относительно движущейся системы отсчета,  $\vec{r}'_{\perp}$  - составляющая радиус-вектора точки относительно вращающейся системы отсчета, перпендикулярная оси вращения этой системы.

Примеры действия сил инерции показаны на рисунках 11.1, 11.2.



Переносная сила инерции.  
Маятник, установленный на тележке, отклоняется в сторону, противоположную направлению ускорения тележки  
Рис. 11.1.

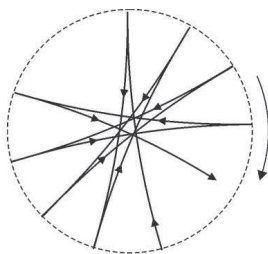


Центробежная сила инерции.  
Маятник, установленный на вращающейся карусели, отклоняется от оси вращения  
Рис. 11.2.

Особенности сил инерции. Отметим две основных особенности. Первая – силы инерции отличны от нуля только для наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчета. Вторая – нельзя указать тела, со стороны которого приложена сила инерции. В этом смысле силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона. В остальном это обычные силы. Они способны вызывать ускорения тел, деформировать тела, совершать работу и т.п.

Невесомость и перегрузка. Весом тела называется сила его давления на неподвижную горизонтальную опору или на вертикальный подвес. Невесомость - это исчезновение веса тела, вызванное ускорением системы отсчета. Напротив, перегрузка - это возрастание веса тела, вызванное ускорением системы отсчета. Оба эти явления объясняются действием сил инерции. Отметим, что явления невесомости и перегрузки особенно важны при космических полетах.

Маятник Фуко. Этот маятник представляет собой тяжелую гиру, подвешенную на длинной (порядка 10 метров) проволоке. Наблюдая свободные колебания маятника Фуко, можно заметить медленное вращение плоскости колебаний относительно поверхности Земли (рис. 11.3). Это явление объясняется действием кориолисовой силы инерции. Принципиальное значение этого опыта состоит в том, что он демонстрирует слабую неинерциальность земной системы отсчета и является экспериментальным доказательством суточного вращения Земли вокруг своей оси.



Кориолисова сила инерции.  
Плоскость колебаний маятника Фуко  
поворачивается с течением времени  
(вид сверху)  
Рис. 11.3.

Центрифуга. Среди технических приложений сил инерции выделим центрифугу. Основным элементом этого устройства является быстро вращающийся цилиндр (ротор). На находящиеся в нем тела действует центробежная сила инерции, под действием которой происходит разделение вещества на тяжелые и легкие фракции. Этот эффект используют для разделения изотопов, химических и медицинских анализов и т.п. Отметим, что в скоростных центрифугах скорость вращения ротора может достигать сотен оборотов в секунду. При этом центробежная сила инерции на несколько порядков превосходит собственный вес объекта, помещенного в центрифугу.

## 12. Импульс частицы и системы частиц. Движение центра масс

Импульс материальной точки. Закон изменения импульса точки. Импульс системы частиц. Центр масс системы частиц. Скорость и ускорение центра масс. Внутренние и внешние силы. Закон движения центра масс.

Импульс материальной точки. Так называется произведение массы материальной точки на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Импульс измеряется в кг · м/с.

Закон изменения импульса точки. Найдем скорость изменения импульса материальной точки. Дифференцируя импульс по времени и учитывая второй закон Ньютона, получим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Таким образом, скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Импульс системы частиц. Импульсом системы частиц называется сумма импульсов отдельных частиц системы:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Вычисление импульса системы частиц значительно упрощается, если ввести понятие центра масс системы частиц.

Центр масс системы частиц. Это точка, радиус-вектор которой определяется формулой:

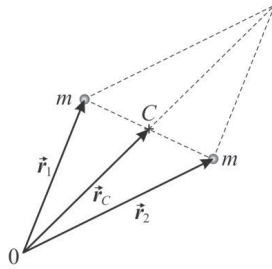
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Здесь  $m_i$  - масса частицы с радиус-вектором  $\vec{r}_i$ ,

$$m = \sum_i m_i$$

- полная масса системы, суммирование ведется по индексу « $i$ », нумерующему отдельные материальные точки системы.

Рассмотрим в качестве примера систему, состоящую из двух одинаковых материальных точек (рис. 12.1).



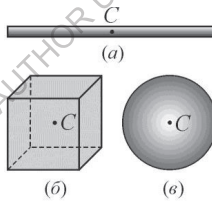
Центр масс системы, состоящей из двух материальных точек

Рис. 12.1.

Нетрудно показать, что центр масс такой системы располагается посередине между этими точками:

$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

Это означает, что центр масс любого однородного симметричного тела располагается в его геометрическом центре. Это верно для стержня, шара, обруча, цилиндра, куба, прямоугольного параллелепипеда и других тел (рис. 12.2).



Центры масс твердых тел: стержня (а); куба (б); шара (в)

Рис. 12.2.

Скорость и ускорение центра масс. Скоростью центра масс называется производная радиус-вектора центра масс по времени

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$$

Ускорением центра масс называется производная скорости центра масс по времени

$$\vec{a}_c = \dot{\vec{v}}_c$$

Согласно данным выше определениям,

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

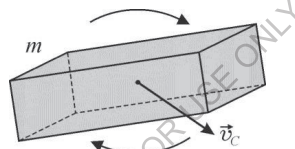
$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Здесь  $\vec{v}_i$  и  $\vec{a}_i$  - скорость и ускорение точки с номером « $i$ ». Точка над буквой обозначает дифференцирование по времени.

Из полученных формул следует, что импульс произвольной механической системы может быть представлен как произведение массы системы на вектор скорости центра масс:

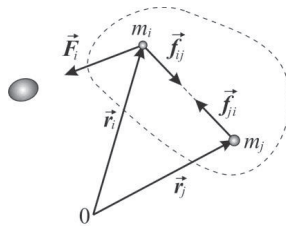
$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$

Иными словами, импульс любой механической системы таков, как если бы вся масса системы находилась в ее центре масс (рис. 12.3).



Импульс твердого тела  
Рис. 12.3.

Внутренние и внешние силы. Введем понятия внутренних и внешних сил для системы частиц (рис. 12.4). Внутренними силами называются силы взаимодействия между телами данной системы. Внешними силами называются силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в данную систему.



Внутренние и внешние силы  
Рис.12.4.

Обозначим через  $\vec{f}_{ij}$  внутреннюю силу, действующую на частицу с номером « $i$ » со стороны частицы с номером « $j$ ». По третьему закону Ньютона

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

или

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0$$

для любой пары индексов « $i$ » и « $j$ ». Итак, для любой пары частиц системы сумма внутренних сил равна нулю. Отсюда следует, что и для всей системы в целом полная сумма всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum_{i,j} \vec{f}_{ij} = 0$$

Закон движения центра масс. Обозначим через  $\vec{F}_i$  внешнюю силу, действующую на частицу системы с номером « $i$ ». Уравнение движения материальной точки системы с номером « $i$ » можно представить в виде:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$$

Просуммируем эти уравнения по индексу « $i$ », нумерующему материальные точки системы. Получим

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{i,j} \vec{f}_{ij}$$

или

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

поскольку

$$\sum_{i,j} \vec{f}_{ij} = 0$$

Отсюда

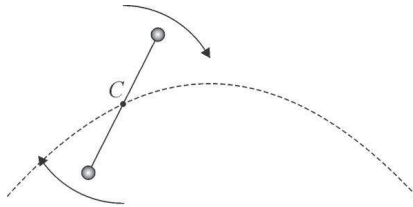
$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

где

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = \sum_i \vec{F}_i$$

- сумма внешних сил. Таким образом, центр масс произвольной механической системы движется так, как если бы в этой точке была сосредоточена вся масса системы и к ней были бы приложены все внешние силы.

Действие этого закона можно наблюдать на примере полета двух шариков, связанных нитью (рис. 12.5). В то время как траектория движения каждого из шариков может быть довольно сложной, центр масс этой системы движется по параболе, т.е. так, как двигалась бы одна материальная точка в однородном поле силы тяжести.



Полет связанных тел и движение центра масс  
Рис. 12.5.

### 13. Закон сохранения импульса

Закон изменения импульса механической системы. Закон сохранения импульса. Закон сохранения импульса относительно оси.

Закон изменения импульса механической системы. Выведем закон изменения импульса механической системы. Напомним, что импульсом системы частиц называется сумма импульсов отдельных частиц системы:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Вычислим производную по времени этой величины. Получим

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Здесь мы использовали формулы параграфа 12

$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

и

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Итак, скорость изменения импульса механической системы равна сумме внешних сил:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Это закон изменения импульса произвольной механической системы.

Закон сохранения импульса. Этот закон получается как частный случай закона изменения импульса. А именно, если сумма внешних сил равна нулю, то импульс механической системы сохраняется. Итак, если

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$$

то

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

В качестве примера действия этого закона можно привести эффект отдачи, который наблюдается при выстреле из пушки (рис. 13.1). В момент выстрела действием внешних сил можно пренебречь, поэтому пушка приобретает импульс равный импульсу вылетающего из нее снаряда, и направленный в противоположную сторону.

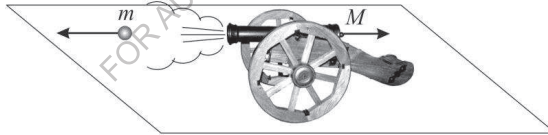


Иллюстрация закона сохранения импульса: выстрел из пушки

Рис. 13.1.

Закон сохранения импульса относительно оси. Закон сохранения импульса можно сформулировать в скалярной форме как закон сохранения импульса относительно оси. А именно, если существует такая ось, в проекции на которую сумма внешних сил равна нулю, то в направлении этой оси импульс системы сохраняется. Итак, если

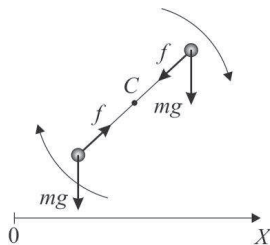
$$F_{\text{внеш}}^{(x)} = 0$$

то

$$p_x = \sum_i m_i v_{ix} = \text{const}$$



В качестве примера рассмотрим полет двух шариков, связанных нитью (рис. 13.2). Вектор импульса этой системы изменяется под действием сил тяжести, направленных по вертикали вниз. В то же время в направлении горизонтальной оси импульс системы сохраняется.

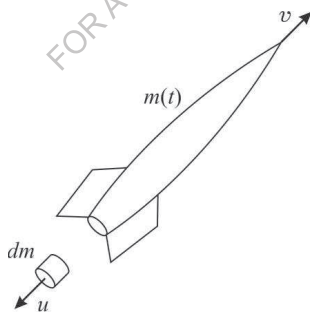


Полет связанных тел и сохранение импульса вдоль оси  
Рис. 13.2.

#### 14. Реактивное движение

Реактивное движение. Реактивная сила. Стартовая масса ракеты.

Реактивное движение. Реактивным называется движение самолета или ракеты, обусловленное выбросом реактивной струи (рис. 14.1). Реактивные двигатели широко используются в авиационной и космической технике. Вычислим реактивную силу, используя закон сохранения импульса.



К вычислению реактивной силы  
Рис. 14.1.

Реактивная сила. Рассмотрим ракету, разгоняющуюся под действием реактивной силы. Пусть в момент времени  $t$  масса ракеты равна  $m$ , а ее скорость равна  $\vec{v}$ . За время  $dt$  ракета выбрасывает вещество массы  $dm$  со скоростью  $\vec{c}$  относительно ракеты. Если пренебречь действием внешних сил (сила тяжести, сила сопротивления воздуха и т. п.), то импульс для системы «ракета – реактивная струя» сохраняется. Уравнение сохранения импульса имеет вид:

$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u}dm$$

Здесь  $d\vec{v}$  - приращение скорости ракеты за время  $dt$ ,  $\vec{u}$  - абсолютная скорость реактивной струи в данный момент времени. Используя правило сложения скоростей Галилея (см. параграф 3), эту скорость можно представить в виде

$$\vec{u} = \vec{c} + \vec{v}$$

Отсюда

$$m d\vec{v} - dm d\vec{v} + \vec{c} dm = 0$$

Пренебрегая здесь величиной второго порядка малости, получим

$$m d\vec{v} = -\vec{c} dm$$

Разделим правую и левую части этого равенства на промежуток времени  $dt$ . Получим

$$m d\vec{v}/dt = -\vec{c} dm/dt$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \vec{c}$$

где

$$\mu = \frac{dm}{dt}$$

- скорость расхода массы. По второму закону Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

где  $\vec{F}$  - сила, действующая на ракету. В данном случае это реактивная сила

$$\vec{F}_p = -\mu \vec{c}$$

Итак, реактивная сила равна скорости истечения реактивной струи относительно ракеты, умноженной на скорость расхода массы.

В качестве примера вычислим силу тяги двигателя ракеты «Энергия». Параметры этого двигателя таковы:  $\mu = 10$  тонн/с,  $c = 3$  км/с. Отсюда  $F_p = \mu c = 3 \cdot 10^7$  Н.

Стартовая масса ракеты. Вычислим стартовую массу ракеты  $m_0$ , необходимую для того, чтобы спутник массы  $m$  мог быть разогнан этой ракетой до скорости  $v$ . Учитывая действие только реактивной силы, уравнение движение ракеты запишем в виде

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{c}$$

Учтем, что за счет выброса реактивной струи масса ракеты уменьшается с течением времени. Тогда

$$m = m(t) = m_0 - \mu t$$

где  $\mu$  - скорость расхода массы (характеристика двигателя ракеты), а время  $t$  отсчитывается от момента старта ракеты. Спроектируем уравнение движения ракеты на направление движения ракеты. Получим

$$m \frac{dv}{dt} = \mu c$$

или

$$(m_0 - \mu t) \frac{dv}{dt} = \mu c$$

Отсюда

$$\frac{dv}{c} = \frac{\mu dt}{m_0 - \mu t}$$

Интегрируя правую и левую часть этого равенства, получаем

$$\int_0^v \frac{dv}{c} = \int_0^t \frac{\mu dt}{m_0 - \mu t} = - \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -\ln \frac{m}{m_0} = \ln \frac{m_0}{m} = \frac{v}{c}$$

Отсюда

$$m_0 = m e^{v/c}$$

Здесь  $m_0$  - стартовая масса ракеты,  $m$  - масса спутника,  $v$  - скорость спутника,  $c$  - скорость истечения реактивной струи.

В качестве примера найдем стартовую массу ракеты «Энергия». Для этой ракеты  $m = 100$  тонн,  $v = 8$  км/с,  $c = 2.7$  км/с. Следовательно,  $m_0 \approx 2000$  тонн.

## 15. Работа и потенциальная энергия

Элементарная работа. Работа. Единица измерения работы. Потенциальная сила. Элементарная потенциальная энергия. Потенциальная энергия. Выражение силы через потенциальную энергию. Градиент. Потенциальная энергия системы частиц.

Элементарная работа. Элементарной работой называется скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы:

$$dA = \vec{F} d\vec{r}$$

Используя определение и свойства скалярного произведения, можно записать

$$dA = F \cdot dr \cdot \cos\alpha$$

или

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Здесь  $F$  - модуль силы, действующей на материальную точку,  $dr$  - модуль бесконечно малого перемещения точки,  $\alpha$  - угол между направлением силы и перемещения (рис. 15.1).



Работа. Полная работа, или просто работа, это сумма элементарных работ:

$$A = \int dA = \int \vec{F} d\vec{r}$$

Здесь интеграл берется по траектории движения материальной точки.

Единица измерения работы. Работа измеряется в джоулях (Дж). Один джоуль это работа, которую совершает сила в 1 ньютон при перемещении точки приложения силы на 1 метр в направлении действия силы:

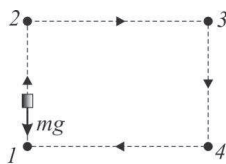
$$\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Потенциальная сила. Сила называется потенциальной, если работа этой силы равна нулю при перемещении точки приложения силы по любому замкнутому контуру:

$$\oint dA = 0$$

Потенциальными являются сила тяжести, сила упругости, сила Кулона. К непотенциальным силам относятся сила трения, мышечная сила.

Покажем, что сила тяжести является потенциальной силой. Рассмотрим перемещение материальной точки в однородном поле тяготения по замкнутому контуру, показанному на рисунке 15.2.



Потенциальная сила

Рис. 15.2.

При перемещении точки по вертикальной линии 1 - 2 вверх работа силы тяжести отрицательна и равна  $-mgl$ , где  $m$  – масса точки,  $g$  – ускорение свободного падения,  $l$  – длина отрезка 1 - 2. На участке 3 - 4 работа силы тяжести положительна и равна  $mgl$ . На участках 2 - 3 и 4 - 1 работа силы тяжести равна нулю, так как на этих участках направление силы перпендикулярно направлению перемещения. Таким образом, работа силы тяжести при перемещении точки по замкнутому контуру равна нулю

$$\oint dA = \oint m\vec{g}d\vec{r} = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = 0$$

Этот результат можно обобщить на случай контура произвольной формы. Следовательно, однородное поле тяготения потенциально.

Элементарная потенциальная энергия. Элементарной потенциальной энергией называется элементарная работа потенциальной силы, взятая со знаком «минус»:

$$d\Pi = -dA_{\Pi}$$

Потенциальная энергия. Полной потенциальной энергией, или просто потенциальной энергией, называется сумма элементарных потенциальных энергий:

$$\Pi = \int d\Pi$$

Потенциальная энергия измеряется в джоулях.

Используя написанные выше формулы, получим следующее выражение для потенциальной энергии

$$\Pi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$$

Здесь  $\vec{r}_0$ - радиус-вектор точки, принятой за начало отсчета потенциальной энергии.

Важно, что в случае потенциальной силы этот интеграл не зависит от пути перехода из точки  $\vec{r}_0$  в точку  $\vec{r}$ . В то же время, для непотенциальной силы – например, силы трения – это не так: интеграл по траектории зависит от пути перехода из точки  $\vec{r}_0$  в точку  $\vec{r}$ .

Применительно к произвольной механической системе можно дать такое определение потенциальной энергии: потенциальная энергия это работа, которую нужно совершить, чтобы перевести систему в данное положение из некоторого другого положения, принятого за начало отсчета потенциальной энергии.

Отметим также, что потенциальная энергия произвольной механической системы зависит только от координат частиц, составляющих эту систему, но не зависит от их скоростей. Потенциальная энергия системы полностью определена, если известны координаты всех тел этой системы.

Выражение силы через потенциальную энергию. Допустим, что мы знаем потенциальную энергию точки как функцию ее декартовых координат:  $\Pi = \Pi(x, y, z)$ . Запишем дифференциал этой функции

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

Производные  $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$  называются частными производными. Это производные, которые берутся при фиксированных значениях всех переменных, кроме тех, по которым дифференцируем.

С другой стороны, по определению элементарной потенциальной энергии,

$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Приравнивая выражения при одинаковых дифференциалах, получаем

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Таким образом, декартовы компоненты потенциальной силы равны взятым со знаком «минус» частным производным потенциальной энергии точки по соответствующим декартовым координатам.

Градиент. Вектор силы можно выразить через потенциальную энергию с помощью понятия градиента функции. Градиентом функции  $\Pi(x, y, z)$  называется вектор, определяемый формулой

$$\text{grad}\Pi = \vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Следовательно,

$$\vec{F} = -\text{grad}\Pi$$

Таким образом, потенциальная сила, действующая на материальную точку, равна взятому со знаком «минус» градиенту потенциальной энергии точки.

Потенциальная энергия системы частиц. Потенциальная энергия системы частиц во внешнем силовом поле равна сумме потенциальных энергий отдельных частиц системы:

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

Потенциальная энергия системы взаимодействующих между собой частиц равна работе, которую нужно совершить, чтобы перевести систему в данное положение из некоторого другого положения, принятого за начало отсчета потенциальной энергии.

## 16. Потенциальная энергия механических систем

Потенциальная энергия материальной точки в однородном поле тяготения. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяготения. Потенциальная энергия пружины. Потенциальная энергия материальной точки в центральном силовом поле. Потенциальная энергия материальной точки в гравитационном поле заданной системы частиц. Потенциальная энергия материальной точки в поле тяготения однородного шара. Сила притяжения материальной точки к шару.

Потенциальная энергия материальной точки в однородном поле тяготения. Рассмотрим материальную точку массы  $m$  в поле силы тяжести вблизи поверхности Земли. Такое поле можно считать однородным. Вычислим потенциальную энергию материальной точки в этом поле.

Сначала вычислим элементарную потенциальную энергию. Направим ось  $z$  по вертикали вверх (рис. 16.1). Тогда

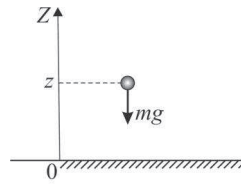
$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = -m\vec{g} d\vec{r} = mgdz$$

Теперь найдем полную потенциальную энергию:

$$\Pi = \int d\Pi = \int_0^z mgdz = mgz$$

где  $z$  - высота точки над поверхностью Земли. Итак, потенциальная энергия материальной точки в однородном поле тяготения

$$\Pi = mgz$$



Потенциальная энергия материальной точки в поле силы тяжести

Рис. 16.1.

Заметим, что любое однородное силовое поле является потенциальным полем.

Потенциальная энергия тела в однородном поле тяготения. В этом случае воспользуемся формулой для потенциальной энергии системы частиц во внешнем силовом поле

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

Подставляя сюда выражение для потенциальной энергии отдельной материальной точки в поле силы тяжести

$$\Pi_i = m_i g z_i$$

получим

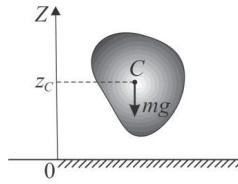
$$\Pi = g \sum_i m_i z_i = mgz_c$$

Итак, потенциальная энергия тела в однородном поле

$$\Pi = mgz_c$$

где  $m$  - масса тела,  $g$  - ускорение свободного падения,  $z_c$  - высота центра масс тела относительно поверхности Земли (рис. 16.2). Иными словами, потенциальная энергия тела в однородном поле тяготения такова, как если бы вся масса тела находилась в его центре масс.





Потенциальная энергия  
 тела в поле силы тяжести  
 Рис. 16.2.

Потенциальная энергия пружины. Вычислим потенциальную энергию сжатой или растянутой пружины. Согласно закону Гука, сила упругости пружины

$$F_x = -kx$$

где  $k$  - коэффициент упругости,  $x$  - величина деформации пружины, ось « $x$ » направлена вдоль пружины (рис. 16.3). Элементарная потенциальная энергия пружины

$$d\Pi = -dA = -\vec{F}d\vec{r} = -F_x dx = kx dx$$

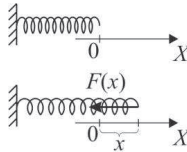
Полная потенциальная энергия

$$\Pi = \int d\Pi = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}$$

Итак, потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины определяется формулой

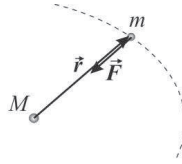
$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

где  $k$  - коэффициент упругости,  $x$  - величина деформации пружины.



Потенциальная  
 энергия пружины  
 Рис. 16.3.

Потенциальная энергия материальной точки в центральном силовом поле. Центральным силовым полем называется поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром (рис. 16.4). Центральные силовые поля создаются точечными частицами, либо однородными телами сферической формы.



Потенциальная  
энергия материальной точки  
в поле центральной силы  
Рис. 16.4.

Рассмотрим центральное гравитационное поле. Пусть это поле создается материальной точкой с массой  $M$ . Вычислим потенциальную энергию частицы с массой  $m$ , находящейся на расстоянии  $r$  от силового центра.

Обозначим радиус-вектор частицы относительно силового центра через  $\vec{r}$ . Тогда вектор силы, действующей на частицу, можно представить в виде

$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} F$$

где

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Элементарная потенциальная энергия

$$d\Pi = -\vec{F} d\vec{r} = \frac{F}{r} \vec{r} d\vec{r}$$

Здесь

$$\vec{r} d\vec{r} = xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr$$

Отсюда

$$d\Pi = F dr = G \frac{Mm}{r^2} dr$$

Полная потенциальная энергия

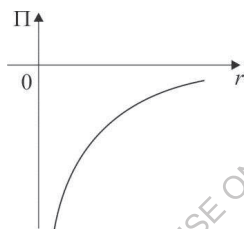
$$\Pi = \int d\Pi = GMm \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = -GMm \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

где  $r_0$  - расстояние частицы от силового центра, на котором потенциальная энергия считается равной нулю.

Положим  $r_0 = \infty$ . Это значит, что потенциальная энергия частицы считается равной нулю, когда частица находится очень далеко от силового центра. В этом случае  $\Pi = -G \frac{Mm}{r}$ . Итак, потенциальная энергия частицы в центральном гравитационном поле определяется формулой

$$\Pi = -G \frac{Mm}{r}$$

Здесь  $G$  - гравитационная постоянная,  $M$  - масса силового центра,  $m$  - масса частицы,  $r$  - расстояние от частицы до силового центра. График функции  $\Pi(r)$  показан на рисунке 16.5.



Зависимость потенциальной энергии материальной точки от расстояния до силового центра

Рис. 16.5.

Аналогичной формулой описывается потенциальная энергия взаимодействия двух материальных точек:

$$\Pi = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Здесь  $m_1$  и  $m_2$  - массы материальных точек,  $r$  - расстояние между ними,  $G$  - гравитационная постоянная.

Потенциальная энергия материальной точки в гравитационном поле заданной системы частиц. Согласно принципу суперпозиции сила, действующая на материальную точку в гравитационном поле заданной системы частиц, равна сумме сил, приложенных со стороны отдельных частиц этой системы

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Потенциальная энергия частицы в заданном силовом поле  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  определяется формулой

$$\Pi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$$

Подставив сюда выражение для силы, и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

где

$$\Pi_i(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_i d\vec{r}$$

- потенциальная энергия материальной точки в поле отдельной частицы системы.

Таким образом, потенциальная энергия материальной точки в гравитационном поле заданной системы частиц равна сумме потенциальных энергий взаимодействия материальной точки с отдельными частицами системы.

Потенциальная энергия материальной точки в поле тяготения однородного шара. В качестве примера вычислим потенциальную энергию материальной точки массы в поле тяготения шара.

Пусть шар имеет массу  $M$  и радиус  $R$ , а материальная точка имеет массу  $m$  и расположена на расстоянии  $z$  от центра шара. Будем считать, что  $z > R$ .

Введем сферическую систему координат, поместив ее начало в центр шара. Выделим элемент шара с объемом, равным элементу объема сферических координат

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

и расположенный около точки со сферическими координатами  $r, \theta, \varphi$ . Масса этого элемента шара

$$dm = \rho dV$$

где

$$\rho = \frac{M}{V}$$

плотность шара и

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

объем шара.

Будем считать, что материальная точка расположена на оси  $z$ . Пусть  $l$  - расстояние от материальной точки до выделенного элемента шара. По теореме косинусов

$$l = \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}$$

Согласно формуле, полученной выше, потенциальная энергия взаимодействия материальной точки с элементом шара

$$d\Pi = -G \frac{mdm}{l}$$

Искомая полная потенциальная энергия есть сумма таких элементарных потенциальных энергий. Ее можно представить в виде интеграла

$$\Pi = \int d\Pi$$

Вычислим этот интеграл. Имеем

$$d\Pi = -Gm\rho \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}}$$

Отсюда

$$\Pi = -Gm\rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

или

$$\Pi = -2\pi Gm\rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}}$$

Вычислим внутренний интеграл. Для этого введем вспомогательные величины

$$x = \cos \theta$$

и

$$y = z^2 + r^2 - 2zrx$$

Тогда

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta}} = - \int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zrx}} = \frac{1}{2zr} \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{z}$$

Теперь

$$\Pi = -\frac{4\pi}{z} Gm\rho \int_0^R r^2 dr = -G \frac{m}{z} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = -G \frac{m}{z} \rho V = -G \frac{mM}{z}$$

Итак, потенциальная энергия взаимодействия материальной точки с шаром определяется формулой

$$\Pi = -G \frac{mM}{z}$$

Здесь  $G$  – гравитационная постоянная,  $m$  – масса точки,  $M$  – масса шара,  $z$  – расстояние от точки до центра шара.

Как видно из этой формулы, потенциальная энергия взаимодействия материальной точки с однородным шаром такова, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

Сила притяжения материальной точки к шару. Эту силу найдем с помощью общей формулы, выражающей силу через потенциальную энергию

$$\vec{F} = -grad\Pi$$

Подставляя в эту формулу

$$\Pi(z) = -G \frac{mM}{z}$$

получим

$$\vec{F} = -\vec{k}G \frac{mM}{z^2}$$

Здесь  $\vec{k}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$  – т.е. по направлению от центра шара к материальной точке. Эта формула показывает, что однородный шар притягивает материальную точку так, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

## 17. Кинетическая энергия частицы и системы частиц

Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия системы частиц.

Кинетическая энергия материальной точки. Кинетической энергией материальной точки называется величина, определяемая формулой

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Здесь  $m$  - масса материальной точки,  $v$  - ее скорость. Кинетическая энергия измеряется в джоулях.

Теорема об изменении кинетической энергии. Найдем закон изменения кинетической энергии. Для этого напишем уравнение движения материальной точки:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Умножим это равенство скалярно на вектор бесконечно малого перемещения точки  $d\vec{r}$ . Получим

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r} = dA = m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m\vec{v} d\vec{v} = mv dv = d(mv^2/2) = dK$$

Итак, получили

$$dK = dA$$

Согласно этой формуле, приращение кинетической энергии материальной точки равно работе действующих на нее сил. Это утверждение называют теоремой об изменении кинетической энергии или законом изменения кинетической энергии.

Кинетическая энергия системы частиц. Кинетическая энергия системы частиц определяется как сумма кинетических энергий отдельных частиц системы:

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

Удобное выражение для кинетической энергии можно получить, используя понятие центра масс системы частиц (см. параграф 12). Напомним, что центром масс системы частиц называется точка, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

где  $m$  - полная масса системы,  $m_i$  и  $\vec{r}_i$  - масса и радиус-вектор отдельной материальной точки системы. Вектор скорости центра масс определяется формулой

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

где  $\vec{v}_i$  - скорость отдельной материальной точки системы.

Рассмотрим систему движущихся материальных точек. Выделим одну из точек этой системы. Пусть масса этой точки равна  $m_i$ , а ее радиус-вектор -  $\vec{r}_i$ . Представим этот радиус-вектор в виде суммы

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

Здесь  $\vec{r}_c$  - радиус-вектор центра масс системы, а  $\vec{r}_{ic}$  - радиус-вектор данной точки системы относительно центра масс. Дифференцируя правую и левую части этой формулы по времени, получим

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

Здесь  $\vec{v}_i$  - вектор скорости данной точки системы,  $\vec{v}_c$  - скорость центра масс системы,  $\vec{v}_{ic}$  - вектор скорости данной частицы относительно центра масс. Эта формула выражает правило сложения скоростей Галилея. Ее можно рассматривать как определение вектора  $\vec{v}_{ic}$ .

Подставим это выражение для скорости частицы в выражение для кинетической энергии системы. Получим

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic})$$

или

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2 + \vec{v}_c \sum_i m_i \vec{v}_{ic}$$

Здесь последняя сумма равна нулю, поскольку

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = m \vec{v}_c - m \vec{v}_c = 0$$

Итак,



$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2$$

или

$$K = K_c + K_{oc}$$

где

$$K_c = \frac{1}{2} m v_c^2$$

- кинетическая энергия, связанная с движением центра масс системы частиц,

$$K_{oc} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2$$

- кинетическая энергия, обусловленная движением точек системы относительно ее центра масс.

Итак, кинетическая энергия системы частиц равна сумме кинетической энергии центра масс системы и кинетической энергии движения точек системы относительно центра масс. Это верно для произвольной системы частиц, в частности, для твердого тела.

### 18. Кинетическая энергия твердого тела

Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное движение. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Момент инерции тела относительно данной оси. Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение.

Остановимся теперь подробнее на кинетической энергии движения твердого тела. Рассмотрим следующие виды движения тела: поступательное движение, вращение тела вокруг неподвижной оси, плоское движение.

Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное движение. Напомним, что поступательным называется движение твердого тела, при котором ориентация тела в пространстве остается неизменной. При таком движении скорости всех точек тела одинаковы. Кинетическая энергия тела при поступательном движении определяется формулой

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2$$

Здесь  $m$  - масса тела,  $v_c$  - скорость движения центра масс.

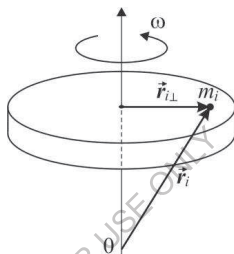
Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Вычислим кинетическую энергию тела при таком движении. Рассматривая твердое тело как систему жестко связанных между собой частиц, запишем

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

Здесь

$$v_i = \omega r_{i\perp}$$

где  $\omega$  - угловая скорость вращения тела (см. параграф 4),  $r_{i\perp}$  - расстояние данной точки тела до оси вращения.



Вращение тела вокруг  
неподвижной оси  
Рис. 18.1.

Отсюда

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_{i\perp}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

или

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

где

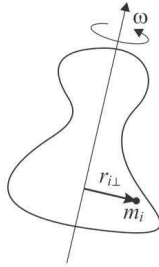
$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

Эта величина называется моментом инерции тела относительно оси вращения.

Момент инерции тела относительно данной оси. Величина

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

представляет собой некоторую характеристику тела по отношению к данной оси вращения. В этой формуле  $m_i$  – масса отдельной материальной точки тела,  $r_{i\perp}$  – расстояние от этой точки до оси вращения.



Момент инерции тела  
относительно данной оси  
Рис.18.2.

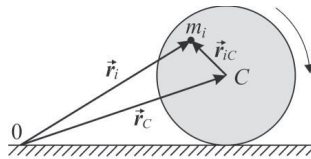
Величина  $I$  называется моментом инерции тела относительно данной оси. Как видно из определения, момент инерции измеряется в  $[\text{кг} \cdot \text{м}^2]$ .

Итак, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой

$$K = \frac{I\omega^2}{2}$$

Здесь  $\omega$  - угловая скорость вращения тела,  $I$  - момент инерции тела относительно данной оси.

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение. Плоским называется движение твердого тела, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. При таком движении ось вращения тела сохраняет постоянную ориентацию в пространстве.



Плоское движение твердого тела  
Рис. 18.3.

Вычислим кинетическую энергию тела при таком движении. Для этого воспользуемся полученной выше формулой (см. параграф 17)

$$K = K_c + K_{oc}$$

При плоском движении тело может совершать только одно движение относительно центра масс – вращаться вокруг неподвижной оси. Следовательно, в данном случае

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Здесь  $m$  - масса тела,  $v_c$  - скорость центра масс,  $\omega$  - угловая скорость вращения тела,  $I$  - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Итак, при плоском движении твердого тела его кинетическая энергия равна сумме энергии движения центра тела и энергии вращения тела вокруг оси, проходящей через центр масс. Это утверждение называют теоремой Кёнига.

## 19. Закон сохранения энергии в механике

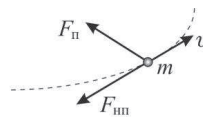
Полная механическая энергия. Закон изменения полной энергии. Закон сохранения энергии в механике Ньютона.

Полная механическая энергия. Полной механической энергией называется сумма кинетической и потенциальной энергий системы:

$$E = K + \Pi$$

Закон изменения полной энергии. Выведем закон изменения полной механической энергии. Пусть есть материальная точка, которая движется под действием потенциальной  $\vec{F}_п$  и непотенциальной  $\vec{F}_{нп}$  сил. Полную силу, действующую на точку, представим в виде

$$\vec{F} = \vec{F}_п + \vec{F}_{нп}$$



К выводу закона сохранения энергии  
Рис. 19.1.

По закону изменения кинетической энергии, приращение кинетической энергии точки равно работе действующих на нее сил (см. параграф 17):

$$dK = dA$$

Здесь

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}_n d\vec{r} + \vec{F}_{np} d\vec{r}$$

или

$$dA = dA_n + dA_{np}$$

где

$$dA_n = \vec{F}_n d\vec{r}$$

- работа потенциальной силы,

$$dA_{np} = \vec{F}_{np} d\vec{r}$$

- работа непотенциальной силы. По определению потенциальной энергии (см. параграф 15),

$$dA_n = -d\Pi$$

где  $d\Pi$  - элементарная потенциальная энергия. Отсюда

$$dK = -d\Pi + dA_{np}$$

или

$$dE = d(K + \Pi) = dA_{np}$$

Таким образом, изменение полной механической энергии материальной точки равно работе действующих на нее непотенциальных сил. Для произвольной механической системы изменение полной энергии также равно работе непотенциальных сил. В этом состоит закон изменения полной механической энергии.

Закон сохранения энергии в механике Ньютона. Если работа непотенциальных сил равна нулю, то полная механическая энергия системы сохраняется. Итак, если

$$A_{np} = 0$$

то

$$E = K + \Pi = const$$

В этом состоит закон сохранения энергии в механике Ньютона.

Действие этого закона хорошо видно на примере многих механических явлений: колебаний маятников, свободного падения тел, скатывания тел по наклонной плоскости и т.п.

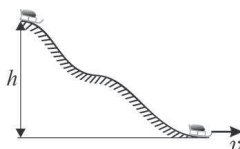


Иллюстрация закона сохранения энергии: скатывание санок с горки

Рис. 19.2.

Например, при скатывании санок с горки высотой  $h$  скорость санок у основания горки определяется законом сохранения энергии (рис. 19.2)

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

и равна

$$v = \sqrt{2gh}$$

независимо от формы горки, закона движения (который может быть очень сложным) и времени движения.

## 20. Упругий удар шаров

Упругий удар. Уравнения сохранения импульса и энергии. Вектор удара.

Упругий удар. Упругим называется удар, при котором кинетическая энергия системы сохраняется.

Рассмотрим упругий удар твердых гладких шаров. Обозначим массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , радиус-векторы центров шаров в момент удара  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , скорости шаров перед ударом  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Найдем скорости шаров после удара  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$ .

Уравнения сохранения импульса и энергии. Воспользуемся законами сохранения импульса и энергии, а также вторым законом Ньютона. Поскольку внешние силы отсутствуют, импульс системы в процессе удара сохраняется. Следовательно,

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

По определению упругого удара

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

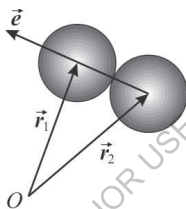
Вектор удара. Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса шара происходит по направлению действующей на него силы. В момент удара сила взаимодействия шаров направлена вдоль линии, соединяющей их центры. Следовательно, приращение импульса первого шара можно представить в виде

$$m_1 \vec{v}'_1 - m_1 \vec{v}_1 = \alpha \vec{e}$$

Здесь  $\alpha$  – некоторая скалярная величина (имеющая размерность импульса),  $\vec{e}$  – единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей центры шаров в момент удара («вектор удара» - рис. 20.1). Этот вектор определяется формулой

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Этих уравнений достаточно для определения искомых скоростей  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$ .



Упругий удар шаров  
Рис. 20.1.

Перепишем законы сохранения в виде

$$m_1(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2)$$

и

$$m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2)$$

Подставив сюда

$$m_1 \vec{v}'_1 - m_1 \vec{v}_1 = \alpha \vec{e}$$

получим

$$m_2 \vec{v}'_2 - m_2 \vec{v}_2 = -\alpha \vec{e}$$

Отсюда

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \frac{\alpha}{m_1} \vec{e}$$

и

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \frac{\alpha}{m_2} \vec{e}$$

Теперь осталось определить только скалярную величину  $\alpha$ . Для этого используем закон сохранения энергии. Предварительно запишем

$$v_1'^2 = \vec{v}'_1 \vec{v}'_1 = \left( \vec{v}_1 + \frac{\alpha}{m_1} \vec{e} \right) \left( \vec{v}_1 + \frac{\alpha}{m_1} \vec{e} \right) = v_1^2 + \frac{\alpha^2}{m_1^2} + 2 \frac{\alpha}{m_1} \vec{v}_1 \vec{e}$$

и

$$v_2'^2 = \vec{v}'_2 \vec{v}'_2 = \left( \vec{v}_2 - \frac{\alpha}{m_2} \vec{e} \right) \left( \vec{v}_2 - \frac{\alpha}{m_2} \vec{e} \right) = v_2^2 + \frac{\alpha^2}{m_2^2} - 2 \frac{\alpha}{m_2} \vec{v}_2 \vec{e}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\vec{e} \vec{e} = 1$$

Из полученных формул следует, что

$$v_1'^2 - v_1^2 = \frac{\alpha^2}{m_1^2} + 2 \frac{\alpha}{m_1} \vec{v}_1 \vec{e}$$

и

$$v_2'^2 - v_2^2 = \frac{\alpha^2}{m_2^2} - 2 \frac{\alpha}{m_2} \vec{v}_2 \vec{e}$$

Подставив эти выражения в формулу

$$m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

получим

$$m_1 \left( \frac{\alpha^2}{m_1^2} + 2 \frac{\alpha}{m_1} \vec{v}_1 \vec{e} \right) = -m_2 \left( \frac{\alpha^2}{m_2^2} - 2 \frac{\alpha}{m_2} \vec{v}_2 \vec{e} \right)$$

Эта формула представляет собой уравнение относительно искомой величины  $\alpha$ . Данное уравнение имеет два решения. Первое из них

$$\alpha = 0$$

соответствует отсутствию соударения шаров. Второе решение определяется уравнением



$$m_1 \left( \frac{\alpha}{m_1^2} + 2 \frac{1}{m_1} \vec{v}_1 \vec{e} \right) = -m_2 \left( \frac{\alpha}{m_2^2} - 2 \frac{1}{m_2} \vec{v}_2 \vec{e} \right)$$

или

$$\frac{\alpha}{m_1} + 2 \vec{v}_1 \vec{e} = -\frac{\alpha}{m_2} + 2 \vec{v}_2 \vec{e}$$

Отсюда

$$\alpha = 2\mu \vec{v} \vec{e}$$

Здесь

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- приведенная масса шаров,

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

- относительная скорость шаров перед ударом.

Итак, величина  $\alpha$  определена. Теперь

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \frac{\alpha}{m_1} \vec{e} = \vec{v}_1 + 2 \frac{\mu}{m_1} (\vec{e}, \vec{v}) \vec{e}$$

и

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \frac{\alpha}{m_2} \vec{e} = \vec{v}_2 - 2 \frac{\mu}{m_2} (\vec{e}, \vec{v}) \vec{e}$$

Итак, скорости шаров после удара определяются выражениями

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + 2 \frac{\mu}{m_1} (\vec{e}, \vec{v}) \vec{e}$$

и

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - 2 \frac{\mu}{m_2} (\vec{e}, \vec{v}) \vec{e}$$

Здесь  $m_1$  и  $m_2$  – массы шаров,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – скорости центров шаров перед ударом,

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

- относительная скорость шаров перед ударом,

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей центры шаров в момент удара,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- приведенная масса шаров. В частности, при ударе одинаковых шаров, когда

$$m_1 = m_2 = m$$

получаем

$$\mu = \frac{m}{2}$$

В этом случае

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + (\vec{e}, \vec{v})\vec{e}$$

и

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - (\vec{e}, \vec{v})\vec{e}$$

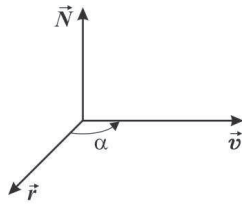
## 21. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы

Момент импульса частицы. Момент силы. Момент импульса системы частиц. Моменты относительно оси.

Момент импульса частицы. Моментом импульса частицы называется векторное произведение радиус-вектора частицы на ее импульс:

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

Взаимная ориентация векторов  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{N}$  показана на рисунке 21.1.



Взаимная ориентация  
радиус-вектора, скорости и  
момента импульса частицы

Рис. 21.1.

Величина момента импульса частицы

$$N = rmv \sin \alpha$$

или

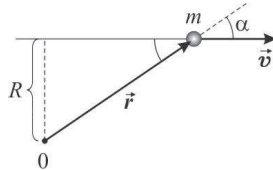
$$N = Rmv$$

где

$$R = r \sin \alpha$$

- расстояние от линии движения точки до начала отсчета (рис. 21.2).

Таким образом, момент импульса материальной точки зависит от выбора начала отсчета. В частности, если начало отсчета выбрано на линии движения частицы, то момент импульса равен нулю. Момент импульса измеряется в  $[м \cdot кг \cdot м/с]$ .



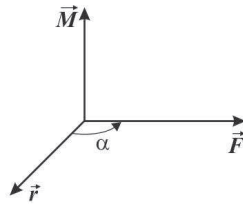
К вычислению момента импульса  
частицы

Рис. 21.2.

Момент силы. Моментом силы называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Взаимная ориентация векторов  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  показана на рисунке 21.3.



Взаимная ориентация  
радиус-вектора точки приложения  
силы, силы и момента силы

Рис. 21.3.

Величина момента силы

$$M = rF \sin \alpha$$

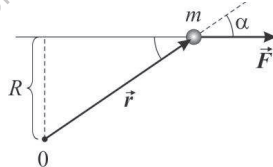
или

$$M = RF$$

где

$$R = r \sin \alpha$$

- расстояние от линии действия силы начала отсчета (рис. 21.4). Эта величина называется плечом силы. Момент силы измеряется в  $[\text{Н} \cdot \text{м}]$ .



К вычислению момента силы

Рис. 21.4.

**Момент импульса системы частиц.** Моментом импульса системы частиц называется сумма моментов импульса отдельных частиц системы:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

Вычислим момент импульса для системы частиц. Введем радиус-вектор центра масс  $\vec{r}_c$  и скорость центра масс  $\vec{v}_c$  для данной системы частиц:

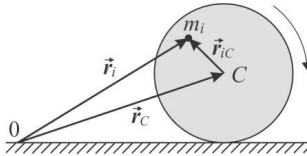
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Представим радиус-вектор и скорость отдельной точки системы в виде (рис. 21.5)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$



Момент импульса системы частиц (тела)

Рис. 21.5.

Тогда

$$\vec{N} = \sum_i m_i [\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}]$$

или

$$\vec{N} = [\vec{r}_c, m\vec{v}_c] + \sum_i m_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}] + \left[ \vec{r}_c, \sum_i m_i \vec{v}_{ic} \right] + \left[ \sum_i m_i \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c \right]$$

или

$$\vec{N} = [\vec{r}_c, m\vec{v}_c] + \sum_i m_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}]$$

поскольку

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = m\vec{v}_c - m\vec{v}_c = 0$$

и

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m \vec{r}_c - m \vec{r}_c = 0$$

Итак, момент импульса произвольной механической системы можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

Здесь

$$\vec{N}_c = [\vec{r}_c, m \vec{v}_c]$$

- момент импульса центра масс,

$$\vec{N}_{oc} = \sum_i m_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}]$$

- момент импульса относительно центра масс.

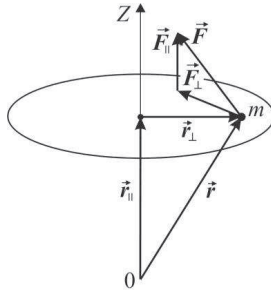
Таким образом, момент импульса произвольной механической системы равен моменту импульса центра масс плюс момент импульса системы относительно центра масс. Первый из этих моментов импульса таков, как если бы вся масса системы находилась в ее центре масс.

Моменты относительно оси. Моментом относительно оси называется проекция вектора момента на эту ось. Это верно как для момента импульса, так и для момента силы. Вычислим момент относительно оси на примере момента силы.

Пусть сила  $\vec{F}$  приложена к точке с радиус-вектором  $\vec{r}$ . Вычислим момент этой силы относительно оси  $z$ . Для этого разложим вектор силы и радиус-вектор точки приложения силы на компоненты, параллельные оси  $z$ , и перпендикулярные этой оси (рис. 21.6):

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$



К вычислению момента силы  
относительно оси  
Рис. 21.6.

Подставив это в выражение для момента силы, получим

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}]$$

или

$$\vec{M} = [\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}] + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]$$

Рассмотрим отдельные слагаемые в этой сумме. Первое слагаемое равно нулю как векторное произведение коллинеарных векторов:

$$[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\parallel}] = 0$$

Второе и третье слагаемые представляют собой вектора, перпендикулярные оси z. Их сумму обозначим

$$[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}] + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}] = \vec{M}_{\perp}$$

Этот вектор имеет нулевую проекцию на ось z. Наконец, последнее слагаемое параллельно оси z. Обозначим его

$$\vec{M}_{\parallel} = [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]$$

Именно это слагаемое определяет момент силы относительно оси.

Итак, составляющая момента силы, параллельная некоторой оси, равна векторному произведению компонент радиус-вектора точки приложения силы и вектора силы, перпендикулярных данной оси.

Аналогично, составляющая момента импульса, параллельная некоторой оси, равна векторному произведению компонент радиус-вектора точки и вектора импульса, перпендикулярных данной оси:

$$\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{\perp}, m\vec{v}_{\perp}]$$

## 22. Момент импульса твердого тела

Момент импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Момент импульса тела относительно оси вращения. Момент импульса тела, совершающего плоское движение.

Момент импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, например, карусель или физический маятник. Найдем составляющую момента импульса тела, параллельную оси вращения. Момент импульса тела равен

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

где сумма берется по всем материальным точкам тела. Согласно сформулированному выше правилу, компонента момента импульса, параллельная оси вращения, определяется формулой (см. параграф 21)

$$\vec{N}_{\parallel} = \left( \sum_i \vec{N}_i \right)_{\parallel} = \sum_i \vec{N}_{i\parallel} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_{i\perp}]$$

где  $\vec{r}_{i\perp}$  - компонента радиус-вектора отдельной материальной точки тела, перпендикулярная оси вращения. Далее, как мы знаем,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i\perp} = [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]$$

(см. параграф 4). Следовательно,

$$\vec{N}_{\parallel} = \sum_i m_i [\vec{r}_{i\perp}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]]$$

Раскроем двойное векторное произведение по формуле:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

Получим

$$\vec{N}_{\parallel} = \sum_i m_i \cdot \{ \vec{\omega} r_{i\perp}^2 - \vec{r}_{i\perp} \cdot (\vec{r}_{i\perp}, \vec{\omega}) \}$$

Здесь  $(\vec{r}_{i\perp}, \vec{\omega}) = 0$  - как произведение ортогональных векторов. Следовательно,



$$\vec{N}_{\parallel} = \vec{\omega} \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

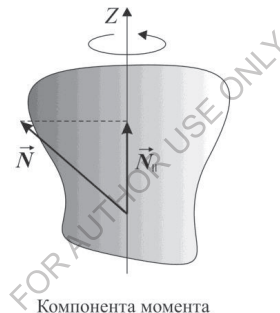
или

$$\vec{N}_{\parallel} = I \vec{\omega}$$

где

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

- момент инерции тела относительно данной оси. Итак, для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, составляющая момента импульса, параллельная оси вращения тела, равна произведению вектора угловой скорости вращения на момент инерции тела относительно данной оси (рис. 22.1).



Компонента момента импульса тела, параллельная оси вращения

Рис. 22.1.

Момент импульса тела относительно оси вращения. Спроектируем векторное равенство  $\vec{N}_{\parallel} = I \vec{\omega}$  на ось вращения тела. Получим

$$N_z = I \omega_z$$

Здесь  $N_z$  - момент импульса тела относительно оси вращения,  $I$  - момент инерции тела относительно той же оси,  $\omega_z$  - угловая скорость вращения тела.

Момент импульса тела, совершающего плоское движение. Рассмотрим тело, совершающее плоское движение, например, цилиндр, скатывающийся по наклонной плоскости. Найдем компоненту момента импульса тела, параллельную оси вращения. Для этого воспользуемся формулой для момента импульса произвольной системы частиц (см. параграф 21):

$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

Возьмем компоненту этого вектора, параллельную оси вращения. Получим

$$\vec{N}_{\parallel} = \vec{N}_{c\parallel} + \vec{N}_{oc\parallel}$$

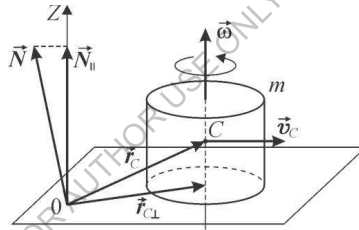
Относительно оси, проходящей через центр масс, тело совершает вращение как вокруг неподвижной оси. Следовательно,

$$\vec{N}_{oc\parallel} = I\vec{\omega}$$

где  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения тела,  $I$  - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Для вектора  $\vec{N}_{c\parallel}$  можно записать

$$\vec{N}_{c\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c]$$

где  $\vec{r}_{c\perp}$  - составляющая радиус-вектора центра масс, перпендикулярная оси вращения.



Момент импульса твердого тела,  
совершающего плоское движение

Рис. 22.2.

Таким образом, в случае плоского движения твердого тела составляющая момента импульса, параллельная оси вращения тела, выражается формулой:

$$\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + I\vec{\omega}$$

Здесь  $\vec{r}_{c\perp}$  - составляющая радиус-вектора центра масс, перпендикулярная оси вращения,  $m$  - масса тела,  $\vec{v}_c$  - вектор скорости центра масс,  $I$  - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения тела (рис. 22.2).

### 23. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульса

Теорема моментов для материальной точки. Теорема моментов для системы частиц. Теорема моментов относительно оси. Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.

Теорема моментов для материальной точки. Напомним, что моментом импульса материальной точки называется векторное произведение радиус-вектора точки на ее импульс:

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

Вычислим производную по времени этой величины. По правилу дифференцирования произведения

$$\dot{\vec{N}} = [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] + [\vec{r}, m\dot{\vec{v}}] = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \vec{F}]$$

Здесь  $[\vec{v}, m\vec{v}] = 0$  как векторное произведение коллинеарных векторов. По определению момента силы,

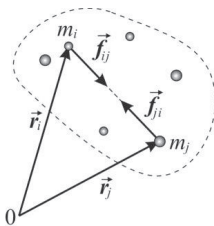
$$[\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$

Следовательно

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$$

Согласно этой формуле, скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту действующей на нее силы. Это утверждение называется теоремой моментов. В частности, если момент силы равен нулю, то момент импульса материальной точки сохраняется.

Теорема моментов для системы частиц. Рассмотрим систему частиц (рис. 23.1). Обозначим массы материальных точек этой системы  $m_i$ , их радиус-векторы  $\vec{r}_i$ , векторы скоростей  $\vec{v}_i$ . Здесь индекс « $i$ » нумерует отдельные материальные точки системы. Введем внутренние и внешние силы, действующие в этой системе. Пусть  $\vec{f}_{ij}$  есть внутренняя сила, действующая на частицу с номером « $i$ » со стороны частицы с номером « $j$ », а  $\vec{F}_i$  есть внешняя сила, действующая на частицу с номером « $i$ ».



К выводу теоремы моментов  
для системы частиц  
Рис. 23.1.

Запишем выражение для момента импульса этой системы

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

Вычислим производную по времени от этой величины:

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\dot{\vec{r}}_i, m_i \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i]$$

Здесь

$$[\dot{\vec{r}}_i, m_i \vec{v}_i] = [\vec{v}_i, m_i \vec{v}_i] = 0$$

как векторное произведение коллинеарных векторов. По второму закону Ньютона

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$$

Отсюда

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i \left[ \vec{r}_i, \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij} \right]$$

или

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_i \left[ \vec{r}_i, \sum_j \vec{f}_{ij} \right]$$

Здесь

$$\vec{M}_{\text{внеш}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

- суммарный момент внешних сил,

$$\vec{M}_{\text{внут}} = \sum_i \left[ \vec{r}_i, \sum_j \vec{f}_{ij} \right]$$

- суммарный момент внутренних сил, действующих на данную систему.

Таким образом, скорость изменения момента импульса системы частиц равна сумме моментов внешних и внутренних сил:

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш}} + \vec{M}_{\text{внут}}$$

Покажем, что суммарный момент внутренних сил равен нулю:

$$\vec{M}_{\text{внут}} = 0$$

Для этого рассмотрим пару частиц системы с номерами « $i$ » и « $j$ ». Суммарный момент внутренних сил для этой пары частиц

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{f}_{ji}]$$

По третьему закону Ньютона

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

Следовательно,

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] - [\vec{r}_j, \vec{f}_{ij}]$$

или

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{f}_{ij}]$$

Обратим внимание на то, что вектор  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  направлен вдоль линии, соединяющей материальные точки. Вдоль этой же линии направлен и вектор внутренней силы  $\vec{f}_{ij}$ . Следовательно, векторное произведение этих векторов равно нулю:

$$\vec{M}_{ij} = 0$$

Итак, суммарный момент внутренних сил равен нулю для любой пары частиц системы. Отсюда следует, что и полный момент всех внутренних сил равен нулю:

$$\vec{M}_{\text{внут}} = \sum_i \sum_j \vec{M}_{ij} = 0$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению: скорость изменения момента импульса системы частиц равна сумме моментов внешних сил, действующих на эту систему:

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш}}$$

Это утверждение представляет собой теорему моментов для системы частиц.

Теорема моментов относительно оси. Рассмотрим в качестве примера вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (ось  $z$ ). Спроектируем векторное равенство  $\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш}}$  на ось вращения тела. Получим

$$\dot{N}_z = M_z$$

Здесь  $N_z$  - момент импульса тела относительно оси вращения,  $M_z$  - суммарный момент внешних сил относительно этой же оси. Таким образом, скорость изменения момента импульса тела относительно оси вращения равна сумме моментов внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси.

Закон сохранения момента импульса. Если сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульса механической системы сохраняется. Итак, если

$$\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$$

то

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \text{const}$$

Это утверждение, вытекающее из теоремы моментов для системы частиц, называется законом сохранения момента импульса.

Закон сохранения момента импульса относительно оси. Закон сохранения момента импульса можно сформулировать в скалярной форме как закон сохранения момента импульса относительно оси. А именно, если существует такая ось, относительно которой сумма моментов внешних сил равна нулю, то относительно этой оси момент импульса системы сохраняется. Итак, если

$$M_z = 0$$

то

$$N_z = \text{const}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим такой пример. Допустим, что на краю вращающейся карусели стоит человек, который затем начинает двигаться к центру карусели (рис. 23.2).

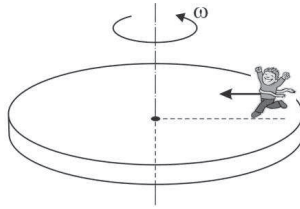


Иллюстрация закона сохранения момента импульса: человек, идущий от края к центру вращающейся карусели, увеличивает угловую скорость ее вращения  
Рис. 23.2.

Согласно закону сохранения момента импульса при таком движении будет сохраняться произведение момента инерции системы относительно оси вращения на угловую скорость вращения:

$$N_z = I\omega_z = const$$

Приближаясь к оси вращения, человек уменьшает момент инерции системы  $I$ . При этом угловая скорость вращения карусели  $\omega_z$  должна увеличиваться. Опыт подтверждает этот вывод.

## 24. Материальная точка в центральном поле

Центральное силовое поле. Законы Кеплера. Сохранение момента импульса. Плоский характер движения материальной точки в центральном поле. Сохранение энергии. Уравнения сохранения энергии и момента импульса в полярных координатах.

Центральное силовое поле. Центральным полем называется поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром. Такое поле создает Солнце в Солнечной системе. Планеты представляют собой материальные точки, движущиеся в центральном поле тяготения Солнца. Путем наблюдения за планетами Солнечной системы были установлены законы движения точки в центральном силовом поле. Эти законы называются законами Кеплера (Иоганн Кеплер, 1619).

Мы начнем с формулировки законов Кеплера, а затем покажем, как эти законы вытекают из основных законов механики – законов сохранения энергии и момента импульса.

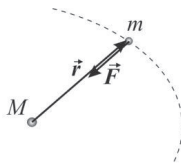
### Законы Кеплера.

Первый закон Кеплера: планеты солнечной системы движутся по эллипсам, в общем фокусе которых находится Солнце.

Второй закон Кеплера: за равные промежутки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади.

Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Сохранение момента импульса. Рассмотрим материальную точку, движущуюся в центральном поле тяготения (рис. 24.1). Пусть  $m$  - масса точки,  $M$  - масса силового центра,  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки относительно силового центра,  $\vec{F}$  - действующая на точку сила. Векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  направлены в противоположные стороны. Поэтому векторное произведение этих векторов равно нулю.



К выводу закона сохранения момента импульса при движении материальной точки в поле центральной силы  
Рис. 24.1.

Следовательно, момент силы, действующей на материальную точку в центральном поле, равен нулю

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0$$

а момент импульса точки в процессе движения не меняется:

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = const$$

Плоский характер движения материальной точки в центральном поле. Сохранение момента импульса точки означает, что при движении в центральном поле точка движется в пределах одной и той же плоскости, перпендикулярной вектору момента импульса. Таким образом, движение точки в центральном силовом поле является плоским движением.

Сохранение энергии. Поле тяготения является потенциальным силовым полем. Поэтому при движении материальной точки ее полная механическая энергия сохраняется. Итак,

$$E = K + \Pi = const$$

Здесь  $E$  - полная механическая энергия материальной точки,



$$K = \frac{mv^2}{2}$$

- кинетическая энергия точки,  $m$  - масса точки,  $v$  - ее скорость,

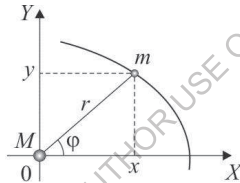
$$\Pi = -\frac{A}{r}$$

ее потенциальная энергия,

$$A = GMm$$

$G$  - гравитационная постоянная,  $M$  - масса силового центра. Выражение для потенциальной энергии точки в центральном силовом поле было получено в параграфе 16.

Уравнения сохранения энергии и момента импульса в полярных координатах. Введем декартовы  $(x, y)$  и полярные  $(r, \varphi)$  координаты точки на плоскости ее движения (рис. 24.2).



Система координат для описания движения материальной точки в центральном силовом поле

Рис. 24.2.

Эти координаты связаны между собой формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Отсюда

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

Квадрат модуля скорости точки

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

Момент импульса точки

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m\vec{k} \cdot (x\dot{y} - y\dot{x}) = \vec{k}mr^2\dot{\varphi}$$

Теперь закон сохранения момента импульса можно представить в виде

$$N = mr^2\dot{\varphi} = const$$

Закон сохранения энергии приобретает вид:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{A}{r} = const$$

Ниже мы покажем, что законы Кеплера вытекают из законов сохранения энергии и момента импульса, действующих при движении частицы в центральном поле тяготения.

## 25. Первый закон Кеплера

Уравнение траектории материальной точки в центральном силовом поле. Типы траектории: окружность, эллипс, парабола, гипербола. Вывод уравнения траектории.

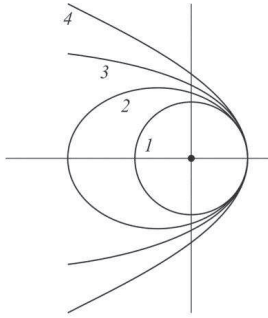
Согласно первому закону Кеплера, планеты солнечной системы движутся по эллипсам, в общем фокусе которых находится Солнце.

Уравнение траектории материальной точки в центральном силовом поле. Уравнение траектории движения материальной точки в центральном поле тяготения имеет вид:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Здесь  $r$  и  $\varphi$  – полярные координаты точки,  $p$  и  $\varepsilon$  – постоянные величины, называемые, соответственно, фокальным параметром и эксцентриситетом орбиты.

Типы траектории: окружность, эллипс, парабола, гипербола. Это уравнение описывает несколько типов траектории: окружность, эллипс, параболу, гиперболу (рис. 25.1). Окружность получается при  $\varepsilon = 0$ , эллипс – при  $0 < \varepsilon < 1$ , парабола – при  $\varepsilon = 1$ , гипербола – при  $\varepsilon > 1$ .



Типы траекторий материальной точки  
в центральном силовом поле: окружность (1);  
эллипс (2); парабола (3); гипербола (4)  
Рис. 25.1.

Вывод уравнения траектории. Теперь остановимся на выводе уравнения траектории. Для этого используем уравнения сохранения энергии и момента импульса, выведенные в параграфе 24. Из уравнения сохранения момента импульса

$$N = mr^2\dot{\varphi}$$

следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N}{mr^2}$$

Подставив это выражение в уравнение сохранения энергии

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{A}{r}$$

получим

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}$$

откуда

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}}$$

Разделим это уравнение на уравнение

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N}{mr^2}$$

При этом из уравнений исключается время, и мы получаем уравнение траектории в дифференциальной форме:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{mr^2}{N} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}}$$

Теперь нужно проинтегрировать это уравнение, чтобы найти функцию  $r(\varphi)$ .

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2r} - \frac{1}{r^2}}$$

Разделим переменные:

$$\frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2r} - \frac{1}{r^2}}} = \pm d\varphi$$

Введем новую переменную

$$s = \frac{1}{r}$$

Тогда

$$ds = -\frac{1}{r^2} dr$$

и

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2}s - s^2}} = \pm d\varphi$$

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:

$$\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2}s - s^2 = -\left(s - \frac{mA}{N^2}\right)^2 + \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}$$

или

$$\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2}s - s^2 = a^2 - x^2$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}}$$

и

$$x = s - \frac{mA}{N^2}$$

При этом

$$dx = ds$$

Теперь

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm d\varphi$$

Далее используем формулу:

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{darc} \sin \left( \frac{x}{a} \right)$$

Получаем

$$\operatorname{darc} \sin \left( \frac{x}{a} \right) = \pm d\varphi$$

Отсюда

$$\operatorname{arcsin} \left( \frac{x}{a} \right) = \operatorname{const} \pm \varphi$$

Итак, интегрирование выполнено. Придадим уравнению траектории более удобный вид. Для этого в полученном выражении выберем знак «минус», и положим  $\operatorname{const} = \frac{\pi}{2}$ . Получим

$$\operatorname{arcsin} \left( \frac{x}{a} \right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Возьмем синус от правой и левой части этого уравнения. Получим

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$$

Отсюда

$$x = a\cos\varphi$$

Теперь вернемся к старым переменным:

$$x = s - \frac{mA}{N^2} = \frac{1}{r} - \frac{mA}{N^2}$$

Тогда

$$\frac{1}{r} - \frac{mA}{N^2} = a\cos\varphi$$

Отсюда

$$r = \frac{1}{\frac{mA}{N^2} + a\cos\varphi} = \frac{N^2/mA}{1 + \frac{N^2 a}{mA} \cos\varphi}$$

или

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

где

$$p = \frac{N^2}{mA}$$

и

$$\varepsilon = \frac{N^2 a}{mA} = \frac{N^2}{mA} \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4}} = \sqrt{1 + \frac{2N^2 E}{mA^2}}$$

Итак, траектория материальной точки в поле центральной силы описывается формулой

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

где

$$p = \frac{N^2}{mA}$$

фокальный параметр,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2N^2E}{mA^2}}$$

- эксцентриситет орбиты,  $m$  - масса материальной точки,  $A = GMm$ ,  $G$  - гравитационная постоянная,  $M$  - масса силового центра,  $N$  - момент импульса точки относительно силового центра,  $E$  - полная механическая энергия точки.

Заметим, что для круговой и эллиптической орбит полная механическая энергия точки отрицательна, для параболической орбиты она равна нулю, а для гиперболической орбиты – положительна.

Таким образом, первый закон Кеплера выведен из основных законов механики Ньютона.

## 26. Второй закон Кеплера

Секторная площадь. Секторная скорость. Сохранение секторной скорости материальной точки при движении в центральном силовом поле.

Согласно второму закону Кеплера, за равные промежутки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади. Этот закон, который называют еще законом сохранения секторной скорости, является следствием закона сохранения момента импульса.

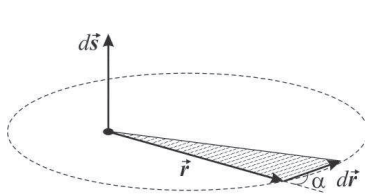
Секторная площадь. Секторной площадью называется векторная величина, определяемая формулой

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{r}]$$

Здесь  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки,  $d\vec{r}$  - вектор бесконечно малого перемещения точки. Величина  $dS$  определяется формулой

$$dS = \frac{1}{2} r dr \sin \alpha$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{r}$  и  $d\vec{r}$ . Построим треугольник на векторах  $\vec{r}$  и  $d\vec{r}$ . Тогда величина  $dr \sin \alpha$  равна высоте этого треугольника, а величина  $dS$  равна его площади (рис. 26.1).



Секторная площадь  
Рис. 26.1.

Секторная скорость. Назовем секторной скоростью материальной точки величину

$$\dot{\sigma} = d\vec{S}/dt$$

Тогда

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}] = \frac{\vec{N}}{2m}$$

где

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

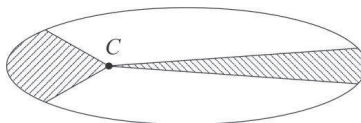
- момент импульса материальной точки.

Сохранение секторной скорости материальной точки при движении в центральном силовом поле. Поскольку, при движении в центральном поле  $\vec{N} = const$ , величина секторной скорости также сохраняется:

$$\dot{\sigma} = const$$

Это и объясняет второй закон Кеплера.

Для иллюстрации этого закона рассмотрим движение материальной точки по сильно вытянутой эллиптической орбите. Выделим два сектора эллиптической орбиты с одинаковыми площадями. Один из них опирается на участок орбиты вблизи силового центра, а другой – на периферийный участок орбиты (рис. 26.2).



Сохранение секторной скорости  
при движении материальной точки по  
эллиптической орбите  
Рис. 26.2.



Заметим, что первый из указанных участков орбиты значительно длиннее второго. По второму закону Кеплера материальная точка должна проходить эти участки орбиты за равные времена. Поэтому можно утверждать, что вблизи силового центра материальная точка движется быстро, а вдали от силового центра, наоборот, медленно.

## 27. Третий закон Кеплера

Период обращения планеты вокруг Солнца. Уравнение траектории планеты. Параметры эллиптической орбиты.

Согласно третьему закону Кеплера, квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит. Докажем это утверждение.

Период обращения планеты вокруг Солнца. Согласно закону сохранения секторной скорости (параграф 26)

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = const$$

Интегрируя это равенство по времени, получим

$$S = \sigma T$$

где  $S$  – площадь эллипса, по которому движется планета,  $T$  – период обращения. Как показано в параграфе 26, секторная скорость может быть представлена в виде

$$\sigma = \frac{N}{2m}$$

где  $N$  – момент импульса планеты относительно Солнца,  $m$  – масса планеты.

Таким образом, период обращения планеты вокруг Солнца

$$T = \frac{2mS}{N}$$

Уравнение траектории планеты. Как показано в параграфе 25, уравнение траектории планеты в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

где

$$p = \frac{N^2}{mA}$$

и

$$A = GMm$$

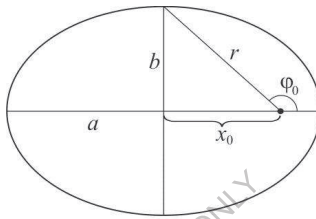
Используя эти выражения, получим

$$N^2 = pmA = GMpm^2$$

и

$$T^2 = \frac{4S^2}{GMp}$$

Параметры эллиптической орбиты. Вычислим площадь эллипса  $S$ . Для этого введем обозначения, показанные на рисунке 27.1.



К выводу третьего закона Кеплера  
Рис. 27.1.

Согласно уравнению траектории, большая полуось эллипса

$$a = \frac{1}{2} [r(0) + r(\pi)] = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$$

Как видно из рисунка,

$$x_0 = a - r(0) = -r(\varphi_0) \cos \varphi_0$$

Отсюда

$$\cos \varphi_0 = -\varepsilon$$

и

$$r(\varphi_0) = a$$

Малая полуось эллипса

$$b = r(\varphi_0) \sin \varphi_0 = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Отсюда следует, что между параметрами эллипса существует соотношение

$$b^2 = pa$$

Положим

$$x = x_0 + r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

Здесь  $x$  и  $y$  – декартовы координаты точки эллипса, в системе координат, начало которой расположено в центре эллипса. Тогда

$$x = \left( \frac{\varepsilon + \cos\varphi}{1 - \varepsilon^2} \right) r(\varphi)$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\varepsilon + \cos\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{\sin\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Это уравнение эллипса в канонической форме. Из него следует, что

$$y(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Элемент площади эллипса  $dS = ydx$ , а его полная площадь

$$S = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz$$

Введем переменную  $\theta$ , определяемую формулой  $z = \sin\theta$ . Тогда

$$\int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{4}$$

и

$$S = \pi ab$$

Здесь  $S$  – площадь эллипса,  $a$  и  $b$  – длины его полуосей. Используя эту формулу вместе с полученными выше выражениями

$$T^2 = \frac{4S^2}{GMp}$$

и

$$b^2 = pa$$

приходим к выводу, что

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Здесь  $T$  период обращения планеты вокруг Солнца,  $a$  – длина большой полуоси ее эллиптической орбиты,  $G$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса Солнца. Поскольку величина  $GM$  одинакова для всех планет, полученная формула доказывает третий закон Кеплера.

## 28. Движение частицы в поле отталкивающего силового центра

Потенциальная энергия взаимодействия точечных электрических зарядов. Уравнения сохранения энергии и момента импульса. Уравнение траектории движения частицы. Прицельный параметр и угол рассеяния.

Потенциальная энергия взаимодействия точечных электрических зарядов. Рассмотрим движение точечной частицы с электрическим зарядом  $q$  в поле одноименно заряженного силового центра с зарядом  $Q$ . Потенциальная энергия частицы

$$\Pi = \frac{B}{r}$$

где

$$B = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$$

и  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.

Уравнения сохранения момента импульса и энергии. В процессе движения сохраняются энергия  $E$  и момент импульса  $N$  частицы. Уравнения, выражающие эти законы, имеют вид

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{B}{r} = E$$

$$mr^2\dot{\varphi} = N$$

Здесь  $r$  и  $\varphi$  – полярные координаты частицы в системе отсчета, начало которой выбрано на силовом центре.

Уравнение траектории движения частицы. Выведем уравнение траектории движения частицы. Из уравнения  $N = mr^2\dot{\varphi}$  следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N}{mr^2}$$

Подставив это выражение в уравнение сохранения энергии, получим

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2B}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}$$

откуда

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2B}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}}$$

Разделим это уравнение на уравнение

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N}{mr^2}$$

При этом исключается время, и мы получаем уравнение траектории в дифференциальной форме:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{mr^2}{N} \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2B}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}}$$

Теперь нужно проинтегрировать это уравнение, чтобы найти функцию  $r(\varphi)$ .

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} - \frac{2mB}{N^2r} - \frac{1}{r^2}}$$

Разделим переменные:

$$\frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} - \frac{2mB}{N^2r} - \frac{1}{r^2}}} = \pm d\varphi$$

Введем новую переменную

$$s = \frac{1}{r}$$

Тогда

$$ds = -\frac{1}{r^2} dr$$

и

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} - \frac{2mB}{N^2}s - s^2}} = \pm d\varphi$$

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении, записав его в виде

$$\frac{2mE}{N^2} - \frac{2mB}{N^2}s - s^2 = -\left(s + \frac{mB}{N^2}\right)^2 + \frac{m^2B^2}{N^4} + \frac{2mE}{N^2}$$

или

$$\frac{2mE}{N^2} - \frac{2mB}{N^2}s - s^2 = a^2 - x^2$$

где

$$a = \sqrt{\frac{m^2B^2}{N^4} + \frac{2mE}{N^2}}$$

и

$$x = s + \frac{mB}{N^2}$$

При этом  $dx = ds$ . Теперь

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm d\varphi$$

Далее используем формулу

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d \left[ \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right]$$

Получаем

$$d \left[ \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right] = \pm d\varphi$$

Отсюда

$$\arcsin \left( \frac{x}{a} \right) = \text{const} \pm \varphi$$

Итак, интегрирование выполнено. Придадим уравнению траектории более удобный вид. Для этого в полученном выражении выберем знак «минус», и положим  $\text{const} = \frac{\pi}{2}$ . Получим

$$\arcsin \left( \frac{x}{a} \right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Возьмем синус от правой и левой части этого уравнения. Получим

$$\frac{x}{a} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi$$

Отсюда

$$x = a \cos \varphi$$

Теперь вернемся к старым переменным:

$$x = s + \frac{mB}{N^2} = \frac{1}{r} + \frac{mB}{N^2}$$

Тогда

$$\frac{1}{r} + \frac{mB}{N^2} = a \cos \varphi$$

Отсюда

$$r = \frac{1}{a \cos \varphi - \frac{mB}{N^2}}$$

или

$$r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon \cos \varphi - 1}$$

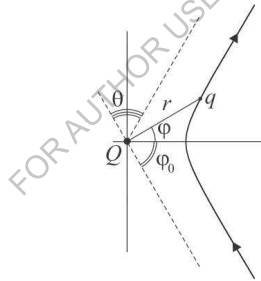
где

$$p = \frac{N^2}{mB}$$

и

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2N^2 E}{mB^2}}$$

Формула для  $r(\varphi)$  описывает траекторию движения материальной точки в поле центральной отталкивающей силы. Величина  $p$  называется фокальным параметром, а  $\varepsilon$  – эксцентриситетом орбиты. Остальные величины, входящие в эти формулы, имеют следующий смысл:  $B = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}$ ,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $Q$  – заряд силового центра,  $q$  – заряд частицы,  $N$  – момент импульса частицы относительно силового центра,  $E$  – полная механическая энергия частицы. Пример траектории показан на рисунке 28.1.



Траектория движения  
частицы  
Рис. 28.1.

Прицельный параметр и угол рассеяния. Траектория представляет собой гиперболу, а угол  $\theta$  между ее ветвями (угол поворота частицы или угол рассеяния) определяется формулой

$$\theta = \pi - 2\varphi_0$$

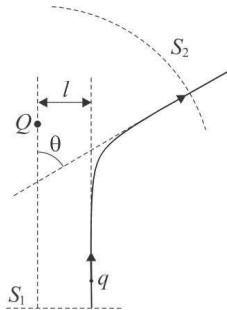
Здесь  $\varphi_0$  – угол наклона луча, который параллелен прямолинейному участку гиперболы, и потому и не имеет с ним общих точек. Этот угол определяется формулой

$$\cos \varphi_0 = 1/\varepsilon$$



где  $\varepsilon$  – эксцентриситет траектории.

Движение частицы в поле отталкивающего силового центра можно охарактеризовать прицельным параметром  $l$ . Так называется расстояние от линии первоначального движения частицы до силового центра (рис. 28.2).



Прицельный параметр  
и угол рассеяния

Рис. 28.2.

Этот параметр связан с моментом импульса частицы соотношением

$$mvl = N$$

Найдем связь прицельного параметра с углом рассеяния. Введем декартовы координаты частицы

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Тогда

$$x = \frac{p \cos \varphi}{\varepsilon \cos \varphi - 1}, \quad y = \frac{p \sin \varphi}{\varepsilon \cos \varphi - 1}$$

Исключая из этих уравнений угол  $\varphi$ , получим уравнение траектории в декартовых координатах

$$y(x) = \pm \sqrt{(\varepsilon x - p)^2 - x^2}$$

В пределе  $x \rightarrow \infty$  функция  $y(x)$  описывает прямолинейные участки гиперболы, а именно

$$y(x) = \pm \alpha (x - x_0)$$

где

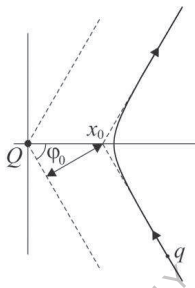
$$\alpha = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \operatorname{tg} \varphi_0$$

и

$$x_0 = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}$$

Как видно из рисунка 28.3,

$$l = x_0 \sin \varphi_0$$



К вычислению  
прицельного параметра  
Рис. 28.3

Отсюда

$$l = p \cdot \operatorname{ctg} \varphi_0$$

или

$$l = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

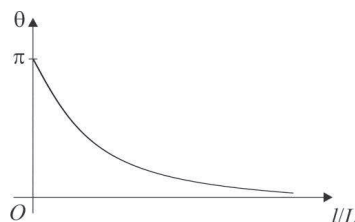
Используя формулы  $p = N^2/mB$  и  $mv l = N$ , находим

$$l = L \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

где

$$L = \frac{B}{mv^2}$$

График зависимости  $\theta(l)$  показан на рисунке 28.4.



Зависимость угла рассеяния от прицельного параметра

Рис. 28.4.

Из него видно, что угол рассеяния монотонно уменьшается с увеличением прицельного параметра.

## 29. Формула Резерфорда

Опыты Резерфорда. Формула Резерфорда. Вывод формулы Резерфорда.

Опыты Резерфорда. В 1911 году Резерфорд провел опыты, доказавшие существование атомного ядра – относительно малой по размеру частицы, в которой содержится почти вся масса атома. В этих опытах наблюдалось рассеяние пучка альфа-частиц на тонкой золотой фольге. Угловое распределение рассеянных частиц позволило заключить, что альфа-частицы рассеиваются на точечных силовых центрах. Эти центры и представляют собой ядра атомов золота.

Формула Резерфорда. Найденное экспериментально угловое распределение частиц хорошо описывается формулой

$$w(\theta) = \frac{const}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

которая называется формулой Резерфорда. В этом параграфе мы дадим вывод формулы Резерфорда на основе развитой выше теории движения частицы в поле отталкивающего силового центра.

Вывод формулы Резерфорда. Допустим, что на отталкивающий силовой центр падает поток одинаковых частиц, движущихся в одном и том же направлении с одинаковой скоростью  $v$ . Как показано в параграфе 28, частица, движущаяся с прицельным параметром  $l$ , рассеивается под углом  $\theta$ , который определяется формулой

$$l = Lctg \frac{\theta}{2}$$

где  $L = const$ . Возьмем дифференциал от правой и левой частей этой формулы. Получим

$$|dl| = L \frac{d\theta}{2\sin^2(\theta/2)}$$

Рассмотрим плоскость  $S_1$ , перпендикулярную падающему пучку частиц. Фрагмент этой плоскости показан на рис. 28.2. Условие

$$l_0 \leq l \leq l_0 + dl$$

выделяет на этой плоскости тонкую кольцевую полосу радиусом  $l_0$  и шириной  $dl$ . Площадь этой полосы

$$dS_1 = 2\pi l_0 |dl|$$

Рассмотрим также сферическую поверхность  $S_2$  достаточно большого радиуса  $r$  с центром на отталкивающем силовом центре. Фрагмент этой поверхности показан на рис. 28.2. Условие

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + d\theta$$

выделяет на этой поверхности тонкую кольцевую полосу радиусом  $r\sin\theta_0$  и шириной  $rd\theta$ . Площадь этой полосы

$$dS_2 = 2\pi r^2 \sin\theta_0 d\theta$$

Ей соответствует элемент телесного угла

$$d\Omega = dS_2/r^2 = 2\pi \sin\theta_0 d\theta$$

Обозначим буквой  $\sigma$  плотность падающего потока частиц. Эта величина определяется формулой

$$\sigma = \frac{dN}{tdS_1}$$

где  $dN$  – число частиц, прошедших через площадку площадью  $dS_1$  за время  $t$ . Тогда

$$dN = \sigma tdS_1$$

Все эти частицы рассеются за тот же промежуток времени в телесный угол  $d\Omega$  вблизи угла рассеяния  $\theta_0$  такого, что

$$l_0 = Lctg \frac{\theta_0}{2}$$

Введем функцию  $w(\theta_0)$ , определяемую формулой

$$dN = w(\theta_0)td\Omega$$

Эта функция характеризует угловое распределение плотности потока рассеянных частиц и имеет размерность  $\frac{1}{\text{стерадиан}\cdot\text{с}}$ . Из приведенных формул следует, что

$$w(\theta_0) = \sigma \frac{dS_1}{d\Omega}$$

или

$$w(\theta_0) = \frac{\sigma L^2}{2\sin^4 \frac{\theta_0}{2}}$$

Опуская здесь индекс «0» и полагая  $\sigma L^2/2 = \text{const}$ , приходим к формуле Резерфорда

$$w(\theta) = \frac{\text{const}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

### 30. Плоское движение твердого тела

Уравнение движения центра масс. Уравнение вращения тела. Угловое ускорение вращения тела. Уравнение вращения тела в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром масс. Уравнение колебаний физического маятника. Скатывание цилиндра по наклонной плоскости. Сводка формул, описывающих плоское движение твердого тела.

Напомним, что плоским движением тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Два основных уравнения описывают плоское движение твердого тела. Это уравнение движения центра масс и уравнение вращения тела.

Уравнение движения центра масс. Это уравнение имеет вид:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Здесь  $m$  - масса тела,  $\vec{a}_c$  - ускорение центра масс,  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  - сумма внешних сил, действующих на тело. Это уравнение справедливо для любой механической системы (см. параграф 12), в частности, для твердого тела, совершающего плоское движение.

Уравнение вращения тела. Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси. Для вывода уравнения вращения, используем теорему моментов относительно оси (см. параграф 23). Согласно этой теореме, скорость изменения момента импульса тела равна сумме моментов внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси:

$$\dot{N}_z = M_z$$

Здесь  $N_z$  - момент импульса тела относительно оси вращения,  $M_z$  - суммарный момент внешних сил относительно этой же оси.

Момент импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой

$$N_z = I\omega_z$$

(см. параграф 22), где  $I$  - момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega_z$  - угловая скорость вращения тела.

Как показано в параграфе 4,

$$\omega_z = \dot{\varphi}$$

где направление отсчета угла  $\varphi$  связано с направлением оси вращения тела  $z$  правилом правого винта.

Подставим выражение  $N_z = I\omega_z$  в формулу  $\dot{N}_z = M_z$ . Учитывая, что момент инерции тела относительно данной оси вращения есть постоянная величина, получим

$$I\dot{\omega}_z = M_z$$

Здесь точка над буквой обозначает производную по времени.

Угловое ускорение вращения тела. Назовем угловым ускорением производную угловой скорости вращения тела по времени. Обозначая эту величину  $\varepsilon_z$ , можно записать

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

или, в краткой записи,

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$$

Угловое ускорение вращения измеряется в радианах на секунду в квадрате [рад/с<sup>2</sup>].

Теперь уравнение вращения тела приобретает вид

$$I\varepsilon_z = M_z$$

или

$$I\ddot{\varphi} = M_z$$

Здесь  $I$  - момент инерции тела относительно оси вращения,  $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$  - угловое ускорение вращения тела,  $M_z$  - сумма моментов внешних сил, действующих на тело,

относительно оси вращения. В такой форме уравнение вращения можно применять для любой неподвижной оси вращения, либо для движущейся оси, проходящей через центр масс тела.

Уравнение вращения тела в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром масс. Система отсчета, связанная с центром масс тела, может двигаться с ускорением. В таком случае эта система будет неинерциальной системой отсчета, и в ней будет действовать переносная сила инерции. Вычислим момент этой силы.

На частицу тела с массой  $m_i$  действует элементарная сила инерции, определяемая формулой

$$\vec{F}_i = -m_i \vec{a}_c$$

где  $\vec{a}_c$  - ускорение центра масс тела. Момент этой силы

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = -[\vec{r}_i, m_i \vec{a}_c] = [\vec{a}_c, m_i \vec{r}_i]$$

Здесь  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор частицы с массой  $m_i$ . Суммарный момент сил инерции, действующих на тело, равен сумме элементарных моментов сил инерции:

$$\vec{M}_{ин} = \sum_i \vec{M}_i = \left[ \vec{a}_c, \sum_i m_i \vec{r}_i \right] = [\vec{a}_c, m \vec{r}_c] = [\vec{r}_c, -m \vec{a}_c] = [\vec{r}_c, \vec{F}_{ин}]$$

Здесь  $m$  – масса тела,

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

– радиус-вектор центра масс тела,

$$\vec{F}_{ин} = -m \vec{a}_c$$

- переносная сила инерции.

Полученная формула

$$\vec{M}_{ин} = [\vec{r}_c, \vec{F}_{ин}]$$

показывает, что суммарный момент сил инерции, действующих на тело в поступательно движущейся системе отсчета, таков, как если бы вся масса тела находилась в его центре масс. Нетрудно видеть, что этот результат есть следствие однородности поля переносной силы инерции.

Итак, мы приходим к выводу, что в поступательно движущейся системе отсчета сила инерции приложена к центру масс тела. Следовательно, относительно центра масс момент силы инерции равен нулю. Уравнение вращения относительно оси, проходящей через центр масс тела, записывается так же, как и относительно неподвижной оси:

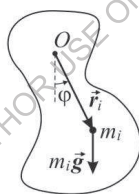
$$I\varepsilon_z = M_z$$

Уравнение колебаний физического маятника. Физический маятник представляет собой тело произвольной формы, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения. Колебания маятника происходят под действием силы тяжести. Поэтому уравнение колебаний имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = M_z$$

где  $\varphi$  - угол отклонения маятника от вертикали,  $I$  - момент инерции маятника относительно оси вращения,  $M_z$  - момент сил тяжести относительно оси вращения маятника.

Вычислим момент сил тяжести, действующих на маятник (рис. 30.1). Пусть  $\vec{r}_i$  - радиус-вектор отдельной частицы маятника с массой  $m_i$ .



К вычислению  
момента сил тяжести  
Рис. 30.1.

Момент силы тяжести, действующей на эту частицу (относительно любой точки) определяется формулой

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{g}]$$

Суммарный момент сил тяжести, действующих на маятник,

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{g}]$$

Преобразуем это выражение:

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{g}] = \left[ \sum_i m_i \vec{r}_i, \vec{g} \right] = [m \vec{r}_c, \vec{g}] = [\vec{r}_c, m \vec{g}]$$



Здесь  $m$  - масса маятника,

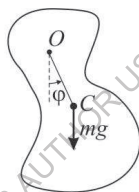
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

- радиус-вектор его центра масс,  $\vec{g}$  - вектор ускорения свободного падения. Этот вектор направлен по вертикали вниз и равен по модулю ускорению свободного падения. Итак,

$$\vec{M} = [\vec{r}_c, m\vec{g}]$$

Эта формула показывает, что момент сил тяжести, действующих на маятник, таков, как если бы вся масса маятника находилась в его центре масс.

Положение маятника в пространстве будем характеризовать углом  $\varphi$ , который составляет направление на центр масс маятника с вертикалью (рис. 30.2). Будем отсчитывать угол  $\varphi$  от вертикали в направлении против часовой стрелки. За направление оси вращения тела  $z$  примем направление, связанное с направлением отсчета угла поворота тела правилом правого винта. В данном случае ось  $z$  будет направлена на нас.



Физический маятник  
Рис. 30.2.

Вычислим момент силы тяжести относительно этой оси. Составляющая вектора  $\vec{M}$ , параллельная оси вращения, определяется формулой

$$\vec{M}_{\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{g}]$$

где  $\vec{r}_{c\perp}$  - компонента радиус-вектора центра масс маятника, перпендикулярная оси вращения (см. параграф 21). В данном случае вектор  $\vec{M}_{\parallel}$  направлен «от нас», а его проекция на ось  $z$ , направленную на нас, равна модулю этого вектора, взятому со знаком «минус»:

$$M_z = -M_{\parallel}$$

Пусть  $l$  - модуль вектора  $\vec{r}_{c\perp}$ , т.е. расстояние от оси вращения маятника до его центра масс. Тогда

$$M_{\parallel} = mgl \sin \varphi$$

и

$$M_z = -mgl\sin\varphi$$

Знак «минус» в этой формуле связан с тем, что сила тяжести стремится повернуть маятник в направлении, противоположном направлению отсчета угла  $\varphi$ .

Итак, момент силы тяжести относительно оси вращения маятника вычислен. Теперь уравнение движения маятника приобретает вид

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

или

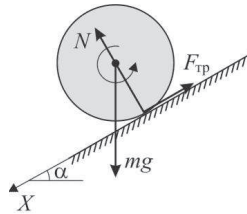
$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\sin\varphi = 0$$

Здесь  $\varphi$  - угол отклонения маятника от вертикали,  $m$  - масса маятника,  $g$  - ускорение свободного падения,  $l$  - расстояние от оси вращения маятника до его центра масс,  $I$  - момент инерции маятника относительно оси вращения. Величина  $\ddot{\varphi}$  обозначает угловое ускорение маятника, равное второй производной угла  $\varphi$  по времени:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Скатывание цилиндра по наклонной плоскости. Рассмотрим скатывание цилиндра по наклонной плоскости. Вычислим ускорение центра цилиндра, считая, что он скатывается без проскальзывания.

Нарисуем силы, действующие на цилиндр (рис. 30.3). Это сила тяжести  $mg$ , приложенная к центру цилиндра и направленная по вертикали вниз, сила трения  $F_{\text{тр}}$ , приложенная в точке касания цилиндра и плоскости, и направленная вдоль плоскости, сила нормального давления  $N$ , приложенная в точке касания цилиндра и плоскости, и направленная по нормали к плоскости.



Скатывание цилиндра  
с наклонной плоскости  
Рис. 30.3.

Направим ось  $x$  вдоль плоскости вниз, и будем отсчитывать угол поворота цилиндра  $\varphi$  в направлении против часовой стрелки. Ось вращения цилиндра « $z$ » направим на нас. Координату центра масс цилиндра по отношению к оси  $x$ , обозначим буквой  $x$ .

Уравнение движения центра масс цилиндра в проекции на ось « $x$ » имеет вид:

$$m\ddot{x} = mgs\sin\alpha - F_{\text{тр}}$$

где  $\alpha$  - угол наклона плоскости к горизонту.

Уравнение вращения цилиндра относительно его оси, проходящей через центр масс,

$$I\varepsilon_z = M_z$$

Момент силы трения относительно оси « $z$ »

$$M_z = R \cdot F_{\text{тр}}$$

где  $R$  - радиус цилиндра.

Отметим, что уравнение вращения цилиндра записано в системе отсчета, связанной с его центром масс. Эта система является неинерциальной, т.к. центр масс цилиндра движется с ускорением. Следовательно, в этой системе действует переносная сила инерции. Однако эта сила приложена к центру масс цилиндра, а потому она не создает вращающего момента относительно оси, проходящей через центр масс.

Из-за отсутствия проскальзывания, смещение центра цилиндра  $x$  связано с углом поворота  $\varphi$  соотношением

$$x = R\varphi$$

Это условие называется уравнением кинематической связи. Дифференцируя это соотношение по времени (два раза), получим

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$$

Наконец,

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_z$$

в силу того, что направление отсчета угла  $\varphi$  связано с направлением оси  $z$  правилом правого винта.

Итак, скатывание цилиндра описывается уравнениями

$$m\ddot{x} = mgs\sin\alpha - F_{\text{тр}}$$

$$I\varepsilon_z = R \cdot F_{\text{тр}}$$

$$\ddot{x} = R\varepsilon_z$$

Решая эти уравнения, получим

$$\ddot{x} = g \frac{\sin\alpha}{1 + I/mR^2}$$

Для однородного цилиндра

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

(см. параграф 31). Следовательно,

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Здесь  $\ddot{x}$  - ускорение центра цилиндра,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\alpha$  - угол наклона плоскости к горизонту.

Сводка формул, описывающих плоское движение твердого тела. В заключение этого параграфа приведем сводку формул, описывающих плоское движение твердого тела:

Уравнение движения центра масс:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Здесь  $m$  - масса тела,  $\vec{a}_c$  - ускорение центра масс тела,  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  - сумма внешних сил, действующих на тело.

Уравнение вращения тела:

$$I\varepsilon_z = M_z$$

Здесь  $I$  - момент инерции тела относительно данной оси вращения,  $\varepsilon_z$  - угловое ускорение вращения тела относительно данной оси,  $M_z$  - сумма моментов внешних сил, действующих на тело относительно данной оси. Это уравнение применимо для любой неподвижной оси, а также для движущейся оси, проходящей через центр масс тела.

Угловое ускорение вращения тела относительно данной оси:

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = d\omega_z/dt$$

Здесь  $\omega_z$  - угловая скорость вращения тела относительно данной оси.

Угловая скорость вращения тела относительно данной оси:

$$\omega_z = \dot{\varphi} = d\varphi/dt$$

Здесь  $\varphi$  - угол поворота тела относительно данной оси, измеренный в радианах. Направление отсчета угла  $\varphi$  связано с направлением оси вращения тела  $z$  правилом правого винта.

Импульс тела:

$$\vec{p} = m\vec{v}_c$$

Здесь  $\vec{v}_c$  - вектор скорости центра масс тела.

Момент импульса тела (составляющая вдоль оси вращения):

$$\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + I\vec{\omega}$$

Здесь  $\vec{r}_{c\perp}$  - составляющая радиус-вектора центра масс тела, перпендикулярная оси вращения,  $I$  - момент инерции тела, относительно оси, проходящей через центр масс,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения тела.

Кинетическая энергия тела:

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, момент импульса тела относительно оси вращения

$$N_z = I\omega_z$$

кинетическая энергия тела

$$K = \frac{I\omega^2}{2}$$

где  $I$  - момент инерции тела относительно данной оси.

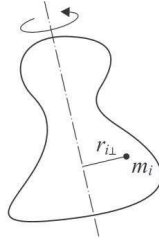
### 31. Момент инерции тела

Момент инерции тела относительно данной оси. Теорема Гюйгенса – Штейнера. Момент инерции стержня. Момент инерции диска. Момент инерции шара.

Момент инерции тела относительно данной оси. Моментом инерции тела относительно данной оси называется величина, определяемая формулой

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

Здесь  $m_i$  - масса материальной точки тела,  $r_{i\perp}$  - расстояние этой точки от оси вращения (рис. 31.1). Индекс « $i$ » нумерует отдельные точки тела. Момент инерции тела измеряется в  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ .



К понятию момента инерции тела

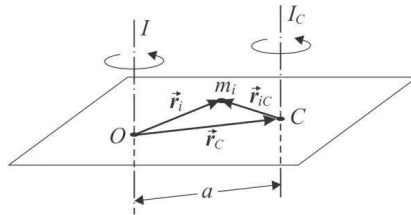
Рис. 31.1.

Теорема Гюйгенса – Штейнера. При вычислении моментов инерции тел полезна теорема Гюйгенса – Штейнера, которая формулируется следующим образом: момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной, плюс масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями (рис. 31.2):

$$I = I_c + ma^2$$

Докажем эту теорему. Выберем отдельную материальную точку тела с массой  $m_i$  и проведем ее радиус-вектор  $\vec{r}_i$ . Начало отсчета «O» выбрано на оси вращения тела. Пусть центр масс тела находится в точке «C» и имеет радиус-вектор  $\vec{r}_c$ . Проведем вектор от центра масс тела к данной точке тела и обозначим его  $\vec{r}_{ic}$ . Тогда

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$



К теореме Гюйгенса-Штейнера

Рис. 31.2.

Поскольку векторы  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$  равны, то равны и их компоненты, перпендикулярные оси вращения, т.е.

$$\vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}$$

Следовательно,

$$r_{i\perp}^2 = \vec{r}_{i\perp} \vec{r}_{i\perp} = (\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}, \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}) = r_{c\perp}^2 + 2\vec{r}_{c\perp} \vec{r}_{ic\perp} + r_{ic\perp}^2$$

где

$$r_{c\perp} = a$$

- расстояние от центра масс тела до оси вращения. Отсюда

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = ma^2 + 2\vec{r}_{c\perp} \sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp} + \sum_i m_i r_{ic\perp}^2$$

Здесь

$$\sum_i m_i r_{ic\perp}^2 = I_c$$

- момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела, параллельно данной. Кроме того,

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp} = 0$$

поскольку вектор

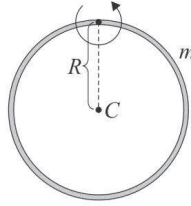
$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = \sum_i m_i \vec{r}_i - m\vec{r}_c = 0$$

и, следовательно, равна нулю компонента этого вектора  $\sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp}$ , перпендикулярная оси вращения тела. Таким образом, получаем

$$I = I_c + ma^2$$

что доказывает теорему Гюйгенса – Штейнера.

В качестве примера вычислим момент инерции обруча относительно оси, перпендикулярной обручу и проходящей через одну из его точек (рис. 31.3). Все точки обруча равно удалены от его центра на расстояние, равное радиусу обруча.



Момент инерции обруча  
Рис. 31.3.

Следовательно, момент инерции обруча относительно оси, проходящей через его центр параллельно данной,

$$I_c = mR^2$$

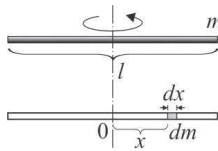
где  $m$  - масса обруча,  $R$  - его радиус. По теореме Гюйгенса – Штейнера

$$I = I_c + mR^2 = 2mR^2$$

Момент инерции стержня. Вычислим момент инерции однородного стержня массы  $m$  и длины  $l$  относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр (рис. 31.4). Представим стержень как совокупность маленьких элементов, каждый из которых будем считать материальной точкой.

Вычислим момент инерции отдельного элемента стержня (элементарный момент инерции). Пусть элемент расположен на расстоянии  $x$  от оси вращения, а его длина равна  $dx$ . Тогда масса этого элемента

$$dm = \frac{m}{l} dx$$



Момент инерции стержня  
Рис. 31.4.

Элементарный момент инерции

$$dI = x^2 dm$$

или



$$dI = \frac{m}{l} x^2 dx$$

Полный момент инерции

$$I = \int dI = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}$$

Если ось вращения проходит через край стержня, то момент инерции можно вычислить по теореме Гюйгенса Штейнера:

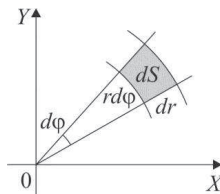
$$I = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Этот результат можно проверить и прямым расчетом:

$$I = \int dI = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{ml^2}{3}$$

Момент инерции диска. Вычислим момент инерции однородного тонкого диска относительно оси, перпендикулярной диску и проходящей через его центр. Пусть масса диска равна  $m$ , его радиус  $R$ . Представим диск как совокупность маленьких элементов, каждый из которых будем считать материальной точкой. Чтобы облегчить задачу суммирования элементарных моментов инерции разобьем диск на элементы следующим образом. Введем на поверхности диска полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ . Элемент площади полярных координат (рис. 31.5)

$$dS = r dr d\varphi$$



Момент инерции диска

Рис. 31.5.

Масса элемента диска

$$dm = \frac{m}{S} dS$$

где

$$S = \pi R^2$$

- площадь диска. Элементарный момент инерции

$$dI = r^2 dm$$

или

$$dI = \frac{m}{S} r^2 r dr d\varphi$$

Полный момент инерции

$$I = \int dI = \frac{m}{S} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{m}{S} 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{m}{\pi R^2} \pi \cdot \frac{R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

Итак, момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной диску и проходящей через его центр масс,

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Эта же формула определяет и момент инерции цилиндра произвольной высоты относительно его оси симметрии. Момент инерции того же диска относительно оси, перпендикулярной диску и проходящей через край диска, найдем по теореме Гюйгенса – Штейнера:

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

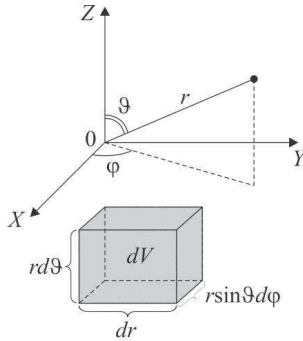
Момент инерции шара. Вычислим момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через центр шара. Пусть масса шара равна  $m$ , а его радиус равен  $R$ . Представим шар как совокупность маленьких элементов, каждый из которых будем считать материальной точкой. Чтобы облегчить задачу суммирования элементарных моментов инерции, введем сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  с началом координат в центре шара и разобьем шар на элементы объема сферических координат. Объем одного такого элемента, расположенного вблизи точки с координатами  $r, \theta, \varphi$ , равен (рис. 31.6)

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

Масса элемента шара

$$dm = \frac{m}{V} dV$$

где  $V$  - объем шара.



Момент инерции шара  
Рис. 31.6.

Вычислим момент инерции шара относительно оси  $z$ . Расстояние выделенного элемента шара до этой оси есть  $r \sin \theta$ . Элементарный момент инерции

$$dl = dm \cdot (r \sin \theta)^2$$

или

$$dl = \frac{m}{V} r^4 \sin^3 \theta \cdot dr d\theta d\phi$$

Полный момент инерции

$$I = \int dl$$

или

$$I = \frac{m}{V} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr$$

Вычисляя этот интеграл, находим

$$I = \frac{m}{V} 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5}{5}$$

Наконец, подставляя сюда

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

получаем

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

### 32. Тензор инерции твердого тела. Главные оси инерции

Типы движения твердого тела. Движение центра масс. Вращение тела. Движение тела с одной неподвижной точкой. Тензор инерции тела. Главные оси инерции. Главные моменты инерции тела. Кинетическая энергия твердого тела.

Типы движения твердого тела. Ранее мы рассмотрели частные случаи движения твердого тела - поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение. Теперь рассмотрим произвольное движение твердого тела. Такое движение описывается двумя основными уравнениями – уравнением движения центра масс и уравнением вращения.

Движение центра масс. Движение центра масс произвольной механической системы и, в частности, твердого тела описывается уравнением

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Здесь  $m$  - масса тела,  $\vec{a}_c$  - ускорение центра масс,  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  - сумма внешних сил, действующих на тело.

Вращение тела. Вращение тела в общем случае описывается теоремой моментов:

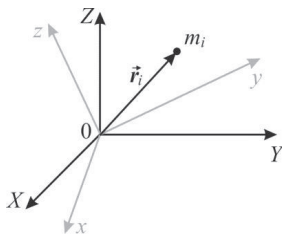
$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш}}$$

Здесь  $\vec{N}$  – момент импульса тела,  $\vec{M}_{\text{внеш}}$  – сумма моментов внешних сил, действующих а тело.

Движение центра масс и вращение тела можно рассматривать независимо друг от друга. В этом параграфе мы сосредоточимся на описании вращении тела. Для простоты будем считать, что центр масс тела (или какая-либо другая точка тела) остается неподвижной. Примером такого движения является вращение волчка в кардановом подвесе. Так мы приходим к задаче о движении тела с одной неподвижной точкой.

Движение тела с одной неподвижной точкой. Рассмотрим движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Введем две системы координат: неподвижную (лабораторную) систему и систему, жестко связанную с телом (систему тела). Начало обеих систем поместим в неподвижную точку тела (рис. 32.1). Оси лабораторной системы

обозначим  $X, Y, Z$ , а оси системы тела обозначим  $x, y, z$ . Орты системы тела обозначим  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ .



Неподвижная система координат и система, связанная с телом  
Рис. 32.1.

Движение тела в каждый момент времени характеризуется вектором мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  и вектором момента импульса  $\vec{N}$ . В этом параграфе мы найдем связь между этими векторами.

Спроектируем векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{N}$  на оси координат жестко связанные с телом. Математически эта операция выражается формулами

$$\vec{\omega} = \vec{e}_x \omega_x + \vec{e}_y \omega_y + \vec{e}_z \omega_z$$

и

$$\vec{N} = \vec{e}_x N_x + \vec{e}_y N_y + \vec{e}_z N_z$$

Вычислим момент импульса тела относительно его неподвижной точки. По определению, он равен сумме моментов импульса отдельных материальных точек тела:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i$$

где

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

Здесь  $m_i$  - масса материальной точки с номером “ $i$ ”,  $\vec{r}_i$  - радиус-вектор точки,  $\vec{v}_i$  - ее скорость относительно лабораторной системы отсчета.

Согласно теореме Эйлера (см. параграф 4), движение тела с одной неподвижной точкой в любой момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку закрепления. При этом скорость любой точки тела можно представить в виде векторного произведения мгновенной угловой скорости вращения тела на радиус-вектор точки:

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$$

Напомним, что мгновенная угловая скорость направлена вдоль мгновенной оси вращения по правилу правого винта и равна по модулю производной угла поворота тела по времени. Мгновенная ось вращения это прямая линия, на которой лежат неподвижные в данный момент точки тела. Теорема Эйлера утверждает, что такая ось всегда существует.

Подставив выражение  $\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$  в формулу  $\vec{N}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$ , получим

$$\vec{N}_i = m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]]$$

или

$$\vec{N}_i = m_i \{ \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega}) \}$$

Спроектируем это векторное равенство на оси координат  $x, y, z$ , жестко связанные с телом. Предварительно запишем

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

и

$$(\vec{r}_i, \vec{\omega}) = (\vec{\omega}, \vec{r}_i) = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i$$

Здесь  $x_i, y_i, z_i$  - декартовы координаты точки с номером "i" в системе координат, жестко связанной с телом (постоянные величины),  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - проекции мгновенной угловой скорости вращения тела на оси координат, жестко связанные с телом. В процессе движения тела мгновенная угловая скорость может менять свою ориентацию относительно тела, поэтому величины  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  являются, вообще говоря, функциями времени. Итак,

$$x_i, y_i, z_i = const$$

но

$$\omega_x = \omega_x(t), \quad \omega_y = \omega_y(t), \quad \omega_z = \omega_z(t)$$

Наша цель состоит в отыскании функций  $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ .

Приступая к решению этой задачи, спроектируем векторное равенство  $\vec{N}_i = m_i \{ \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega}) \}$  на ось координат  $x$ , жестко связанную с телом. Получим

$$N_{ix} = m_i \{ \omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) \}$$

или

$$N_{ix} = m_i \{ (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \}$$

Аналогичным образом получим еще два уравнения

$$N_{iy} = m_i \{ -y_i x_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z \}$$

$$N_{iz} = m_i \{ -z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \}$$

Теперь просуммируем полученные равенства по всем точкам тела. Тогда мы получим выражения для проекций вектора момента импульса на оси координат  $x, y, z$ , жестко связанные с телом. Эти выражения можно представить в виде

$$N_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$N_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$N_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

Тензор инерции твердого тела. Матрица коэффициентов  $I_{ij}$  в этих формулах называется тензором инерции твердого тела. Эти коэффициенты определяются формулами

$$I_{xx} = \sum_i m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2), \quad I_{zz} = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

Видно, что эта матрица симметрична, а размерность ее элементов совпадает с размерностью момента инерции тела. Тензорная связь векторов момента импульса  $\vec{N}$  и мгновенной угловой скорости вращения тела  $\vec{\omega}$  означает, что эти векторы, вообще говоря, не параллельны друг другу.

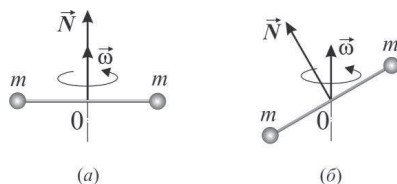
Итак, тензор инерции тела это матрица, связывающая декартовы компоненты момента импульса и мгновенной угловой скорости вращения тела. Эта матрица зависит от размеров и формы тела, а также от выбора осей координат  $x, y, z$  относительно тела.

Главные оси инерции тела. Для любого тела можно так выбрать направления осей  $x, y, z$  относительно тела, что тензор инерции станет диагональным. Такие оси называются главными осями инерции тела. В главных осях выражения для компонент момента импульса тела приобретают вид

$$N_x = I_x \omega_x, \quad N_y = I_y \omega_y, \quad N_z = I_z \omega_z$$

Физически главные оси инерции выделены тем, что если тело вращается вокруг любой из этих осей, то вектор момента импульса становится параллельным вектору угловой скорости.

Поясним понятие главной оси инерции на примере простой модели твердого тела – симметричной гантели. Когда гантелька вращается вокруг своей оси симметрии, вектор момента импульса гантели параллелен вектору угловой скорости (рис. 32.2а). Следовательно, ось симметрии гантели является для нее главной осью инерции. Если же гантелька вращается вокруг оси, наклоненной к оси симметрии под некоторым углом, то вектор момента импульса не параллелен вектору угловой скорости (рис. 32.2б). Такая ось не является главной осью инерции.



К понятию главных осей инерции тела  
Рис. 32.2.

Этот пример показывает, что для симметричного тела главные оси инерции совпадают с осями симметрии тела. Это имеет место, в частности, для таких тел как стержень, диск, шар, куб и т.п.

Главные моменты инерции тела. Компоненты тензора инерции  $I_x, I_y, I_z$ , записанного в главных осях инерции, называются главными моментами инерции тела.

Далее в задаче о динамике твердого тела будем считать, что орты  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  задают направления главных осей инерции тела. В этом случае связь векторов мгновенной угловой скорости и момента импульса тела определяется формулами  $N_x = I_x \omega_x, N_y = I_y \omega_y, N_z = I_z \omega_z$ , где  $I_x, I_y, I_z$  - главные моменты инерции тела.

Кинетическая энергия твердого тела. Кинетическую энергию тела с одной неподвижной точкой можно представить в виде

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{N}$$

или

$$K = \frac{1}{2} (\omega_x N_x + \omega_y N_y + \omega_z N_z) = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

Здесь  $I_x, I_y, I_z$  - главные моменты инерции тела,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - проекции вектора мгновенной угловой скорости на главные оси инерции тела. Кинетическая энергия твердого тела при



произвольном движении равна сумме кинетической энергии центра масс тела и кинетической энергии вращения тела относительно центра масс (см. параграф 17):

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

Здесь  $m$  – масса тела,  $v_c$  – скорость центра масс тела,  $I_x, I_y, I_z$  – главные моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс тела,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора мгновенной угловой скорости на главные оси инерции тела.

### 33. Динамика твердого тела. Уравнения Эйлера

Уравнения движения тела с одной неподвижной точкой. Свободное вращение симметричного волчка. Движение асимметричного волчка. Уравнения для матрицы поворота тела.

Уравнения движения тела с одной неподвижной точкой. Продолжим анализ движения тела с одной неподвижной точкой. Выведем уравнения для проекций вектора мгновенной угловой скорости вращения тела  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  на главные оси инерции тела. Вращение тела описывается теоремой моментов

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$$

Здесь  $\vec{N}$  – момент импульса тела,  $\vec{M}$  – сумма моментов внешних сил, действующих на тело,

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt}$$

- скорость изменения момента импульса тела относительно лабораторной системы отсчета. Вычислим эту величину. Для этого воспользуемся формулой

$$\vec{N} = \vec{e}_x N_x + \vec{e}_y N_y + \vec{e}_z N_z$$

Здесь  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – орты главных осей инерции тела,  $N_x, N_y, N_z$  – проекции вектора момента импульса тела на главные оси инерции. Все величины, входящие в эту формулу, вообще говоря, меняются с течением времени. Следовательно, скорость изменения момента импульса

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{e}_x \frac{dN_x}{dt} + \vec{e}_y \frac{dN_y}{dt} + \vec{e}_z \frac{dN_z}{dt} + N_x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + N_y \frac{d\vec{e}_y}{dt} + N_z \frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Первые три слагаемые в этой формуле выражают скорость изменения вектора  $\vec{N}$  относительно системы отсчета, связанной с самим твердым телом:

$$\frac{d'\vec{N}}{dt} = \vec{e}_x \frac{dN_x}{dt} + \vec{e}_y \frac{dN_y}{dt} + \vec{e}_z \frac{dN_z}{dt}$$

Остальные слагаемые описывают изменение вектора  $\vec{N}$  за счет вращения тела относительно неподвижной системы отсчета. Вычислим скорость изменения ортов системы тела. Как показано в параграфе 4, скорость изменения любого вектора  $\vec{A}$ , жестко связанного с вращающейся системой отсчета, можно найти по формуле

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{A}]$$

Здесь  $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости вращающейся системы отсчета. Применяя эту формулу для ортов системы тела, получим

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_x], \quad \frac{d\vec{e}_y}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_y], \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_z]$$

Отсюда следует, что

$$N_x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + N_y \frac{d\vec{e}_y}{dt} + N_z \frac{d\vec{e}_z}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{N}]$$

Таким образом, получаем

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d'\vec{N}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{N}]$$

Векторное произведение мгновенной угловой скорости на момент импульса тела представим в виде

$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix}$$

или

$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \vec{e}_x(\omega_y N_z - \omega_z N_y) + \vec{e}_y(\omega_z N_x - \omega_x N_z) + \vec{e}_z(\omega_x N_y - \omega_y N_x)$$

Как показано в параграфе 32,

$$N_x = I_x \omega_x, \quad N_y = I_y \omega_y, \quad N_z = I_z \omega_z$$

Используя эти формулы, получим

$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \vec{e}_x(I_z - I_y)\omega_y\omega_z + \vec{e}_y(I_x - I_z)\omega_z\omega_x + \vec{e}_z(I_y - I_x)\omega_x\omega_y$$

Кроме того,

$$\frac{d'\vec{N}}{dt} = \vec{e}_x \frac{dN_x}{dt} + \vec{e}_y \frac{dN_y}{dt} + \vec{e}_z \frac{dN_z}{dt} = \vec{e}_x I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \vec{e}_y I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \vec{e}_z I_z \frac{d\omega_z}{dt}$$

Записывая уравнение  $\dot{\vec{N}} = \vec{M}$  в проекциях на главные оси инерции тела, получаем три уравнения

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = M_x$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x = M_y$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = M_z$$

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера. Здесь индексы  $x, y, z$  обозначают главные оси инерции тела,  $I_x, I_y, I_z$  - главные моменты инерции тела,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - проекции вектора мгновенной угловой скорости на главные оси инерции тела,  $M_x, M_y, M_z$  - суммарные моменты внешних сил относительно главных осей инерции тела.

Свободное вращение симметричного волчка. Рассмотрим в качестве примера свободное вращение симметричного волчка. Так называется тело, у которого совпадают два из трех главных момента инерции (например, обруч или диск). Обозначим

$$I_x = I_y \equiv I_A \neq I_z \equiv I_B$$

В этом случае ось  $z$  является осью симметрии волчка. Положим

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

Тогда уравнения Эйлера приобретают вид

$$I_A \frac{d\omega_x}{dt} + (I_B - I_A)\omega_y\omega_z = 0$$

$$I_A \frac{d\omega_y}{dt} + (I_A - I_B)\omega_z\omega_x = 0$$

$$I_B \frac{d\omega_z}{dt} = 0$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\omega_z(t) = \text{const}$$

Обозначим эту постоянную  $\omega_{z0}$ . Тогда уравнения для функций  $\omega_x(t)$  и  $\omega_y(t)$  приобретают вид

$$\dot{\omega}_x + \Omega\omega_y = 0$$

$$\dot{\omega}_y - \Omega\omega_x = 0$$

Здесь точка над буквой обозначает дифференцирование по времени и

$$\Omega = \frac{I_B - I_A}{I_A} \omega_{z0}$$

есть постоянная величина, имеющая размерность угловой скорости. Решение уравнений для функций  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$  представим в виде

$$\omega_x(t) = \omega_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\omega_y(t) = \omega_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\omega_z(t) = \omega_{z0}$$

где  $\omega_0$  и  $\varphi$  – постоянные величины. При этом

$$N_x(t) = N_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$N_y(t) = N_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

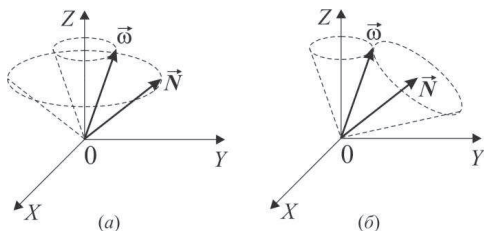
$$N_z(t) = N_{z0}$$

Согласно этим формулам, векторы мгновенной угловой скорости и момента импульса волчка синхронно движутся по коническим поверхностям вокруг оси симметрии волчка (рис. 33.1а). По закону сохранения момента импульса в неподвижной системе отсчета вектор момента импульса волчка остается постоянным:

$$\vec{N} = \text{const}$$

Это означает, что свободный симметричный волчок движется так, как если бы он был жестко связанным с конусом, катящимся без проскальзывания по поверхности другого конуса (рис. 33.1б). Вершины обоих указанных конусов находятся в неподвижной точке тела. Ось симметрии неподвижного конуса направлена вдоль вектора  $\vec{N}$ . Ось симметрии

подвижного конуса совпадает с осью симметрии волчка. Линия касания конусов проходит по вектору  $\vec{\omega}$ . Эта линия является мгновенной осью вращения волчка.



Свободное вращение симметричного волчка

Рис. 33.1.

Движение асимметричного волчка. Асимметричным волчком называется тело, у которого различны все три главных момента инерции:

$$I_x \neq I_y \neq I_z$$

Анализ движения такого волчка можно провести численно. Решение уравнений Эйлера для случая свободного вращения асимметричного волчка (когда момент внешних сил равен нулю) показывает, что если волчок закручен вокруг главной оси инерции с максимальным или минимальным моментом инерции, то его вращение устойчиво. В этом случае ось вращения волчка сохраняет свою ориентацию в пространстве, заданную ей в начальный момент времени. Такое движение волчка почти не отличается от плоского движения. Если же волчок закручен вокруг главной оси со средним моментом инерции, то его вращение неустойчиво. В этом случае ось вращения волчка меняет свою ориентацию в процессе движения как относительно самого волчка, так и относительно неподвижной системы отсчета.

Уравнения для матрицы поворота тела. Описать положение тела в пространстве можно с помощью матрицы поворота (см. параграф 5). Эта матрица составлена из скалярных произведений ортов двух координатных систем - неподвижной системы и системы, связанной с телом. В обозначениях параграфа 5 элемент матрицы поворота определяется формулой

$$S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}'_j$$

Вычислим производную по времени от этой величины. Поскольку орты неподвижной системы координат  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  постоянны,

$$\dot{S}_{ij} = \vec{e}_i \dot{\vec{e}}'_j$$

Здесь точка над буквой обозначает дифференцирование по времени. Скорость изменения ортов, связанных с телом, вычислим по формуле

$$\dot{\vec{e}}'_j = [\vec{\omega}, \vec{e}'_j]$$

Здесь  $\vec{\omega}$  - вектор мгновенной угловой скорости вращения тела, угловые скобки обозначают векторное произведение векторов. Направим орты  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  вдоль главных осей инерции тела. Тогда

$$\dot{\vec{e}}'_1 = [\vec{\omega}, \vec{e}'_1] = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}'_2 \omega_z - \vec{e}'_3 \omega_y$$

$$\dot{\vec{e}}'_2 = [\vec{\omega}, \vec{e}'_2] = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}'_1 \omega_z + \vec{e}'_3 \omega_x$$

$$\dot{\vec{e}}'_3 = [\vec{\omega}, \vec{e}'_3] = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}'_1 \omega_y - \vec{e}'_2 \omega_x$$

С помощью этих формул можно вывести уравнения для элементов матрицы поворота. Эти уравнения имеют вид

$$\dot{S}_{11} = \vec{e}_1 \dot{\vec{e}}'_1 = \vec{e}_1 (\vec{e}'_2 \omega_z - \vec{e}'_3 \omega_y) = S_{12} \omega_z - S_{13} \omega_y$$

$$\dot{S}_{12} = \vec{e}_1 \dot{\vec{e}}'_2 = \vec{e}_1 (-\vec{e}'_1 \omega_z + \vec{e}'_3 \omega_x) = -S_{11} \omega_z + S_{13} \omega_x$$

$$\dot{S}_{13} = \vec{e}_1 \dot{\vec{e}}'_3 = \vec{e}_1 (\vec{e}'_1 \omega_y - \vec{e}'_2 \omega_x) = S_{11} \omega_y - S_{12} \omega_x$$

$$\dot{S}_{21} = \vec{e}_2 \dot{\vec{e}}'_1 = \vec{e}_2 (\vec{e}'_2 \omega_z - \vec{e}'_3 \omega_y) = S_{22} \omega_z - S_{23} \omega_y$$

$$\dot{S}_{22} = \vec{e}_2 \dot{\vec{e}}'_2 = \vec{e}_2 (-\vec{e}'_1 \omega_z + \vec{e}'_3 \omega_x) = -S_{21} \omega_z + S_{23} \omega_x$$

$$\dot{S}_{23} = \vec{e}_2 \dot{\vec{e}}'_3 = \vec{e}_2 (\vec{e}'_1 \omega_y - \vec{e}'_2 \omega_x) = S_{21} \omega_y - S_{22} \omega_x$$

$$\dot{S}_{31} = \vec{e}_3 \dot{\vec{e}}'_1 = \vec{e}_3 (\vec{e}'_2 \omega_z - \vec{e}'_3 \omega_y) = S_{32} \omega_z - S_{33} \omega_y$$

$$\dot{S}_{32} = \vec{e}_3 \dot{\vec{e}}'_2 = \vec{e}_3 (-\vec{e}'_1 \omega_z + \vec{e}'_3 \omega_x) = -S_{31} \omega_z + S_{33} \omega_x$$

$$\dot{S}_{33} = \vec{e}_3 \dot{\vec{e}}'_3 = \vec{e}_3 (\vec{e}'_1 \omega_y - \vec{e}'_2 \omega_x) = S_{31} \omega_y - S_{32} \omega_x$$

Решая уравнения Эйлера совместно с уравнениями для матрицы поворота можно найти функции  $S_{ij}(t)$ , которые описывают закон движения твердого тела в пространстве.

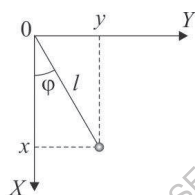
### 34. Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты

Связи в механике. Уравнения связи. Заданные силы. Силы реакции. Голономные связи. Стационарные связи. Число степеней свободы системы. Обобщенные координаты. Обобщенные скорости. Свойства обобщенных координат.

Связи в механике. Связи это не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механической системы.

Уравнения связи. Математически связи выражаются уравнениями связей, т.е. соотношениями между координатами, скоростями и ускорениями точек системы.

Познакомимся с этими понятиями на примере простой модельной системы – плоского математического маятника (рис. 34.1).



Математический маятник  
Рис. 34.1.

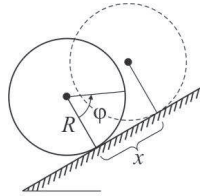
Маятник представляет собой материальную точку, подвешенную на нити, и способную совершать колебания под действием силы тяжести. Введем декартову систему координат, поместив начало отсчета в точку подвеса маятника. Тогда координаты маятника удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Это уравнение называется уравнением связи.

Другой пример – качение цилиндра по плоскости без проскальзывания, когда угол поворота цилиндра и смещение его центра связаны соотношением (рис. 34.2)

$$x = R\varphi$$

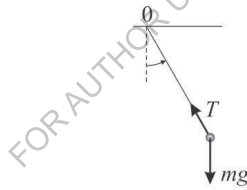


Скатывание цилиндра  
по наклонной плоскости  
Рис. 34.2.

Вернемся к математическому маятнику. На материальную точку действуют две силы – сила тяжести и сила натяжения нити. Первая из них называется заданной силой, вторая – силой реакции связи (рис. 34.3).

Заданные силы. Это известные постоянные силы или известные функции координат частиц. К таким силам относятся сила тяжести, сила упругости, сила Кулона, сила Архимеда.

Силы реакции. Это силы, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на тела системы. К ним относятся силы натяжения нитей или стержней, силы нормального давления, силы трения.



Заданные силы  
и силы реакции  
Рис. 34.3.

Голономные связи. Так называют связи, которые сводятся к ограничениям только на координаты тел. В противном случае связь называется неголономной.

Пример голономной системы – плоский математический маятник. Другой пример – качение цилиндра без проскальзывания. Пример неголономной связи – качение шара по плоскости без проскальзывания. В этом случае связаны угловая скорость вращения шара и скорость движения его центра, а именно,

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

где  $\vec{R}$  - вектор, проведенный от точки касания шара и плоскости к центру шара. Однако это уравнение нельзя проинтегрировать по времени, т.к. в процессе качения шара может



изменяться направление его движения. В дальнейшем мы рассмотрим только голономные системы.

Стационарные связи. Это связи, уравнения которых не содержат времени в явном виде. В противном случае связь называется нестационарной.

Пример системы со стационарной связью – обычный математический маятник. Пример системы с нестационарной связью – математический маятник, у которого длина нити меняется со временем по заданному закону, а уравнение связи имеет вид

$$x^2 + y^2 = l^2(t)$$

Отметим, что в такой системе возможно своеобразное физическое явление – параметрический резонанс – которое заключается в том, что маятник можно сильно раскачать, если подобрать соответствующим образом закон изменения длины нити во времени.

Приступая к решению задачи о движении системы со связями, введем понятие числа степеней свободы системы.

Число степеней свободы это число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве. Обозначим это число буквой  $s$ .

Если система состоит из  $N$  материальных точек и подчиняется  $k$  уравнениям связей, то число степеней свободы можно определить по формуле

$$s = 3N - k$$

Например, одна свободная материальная точка имеет 3 степени свободы, две свободные точки – 6 степеней свободы, две точки, связанные стержнем – 5 степеней свободы, жесткий треугольник – 6 степеней свободы, абсолютной твердое тело – 6 степеней свободы.

Обобщенные координаты. Это  $s$  координат, полностью определяющих положение системы в пространстве. Обозначим их

$$q_1, q_2, \dots, q_s$$

а весь набор таких координат -  $\{q\}$ .

Обобщенные скорости. Это производные обобщенных координат по времени. Обозначим их

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$$

а весь набор таких скоростей -  $\{\dot{q}\}$ .

Свойства обобщенных координат. Отметим два основных свойства. Первое - радиус-векторы точек системы являются однозначными функциями обобщенных координат:

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

В случае стационарных голономных связей

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

Второе свойство – обобщенные координаты обращают в тождества уравнения связей.

Проиллюстрируем эти свойства на примере математического маятника. У плоского математического маятника одна степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол отклонения маятника от вертикали -  $\varphi$ . Тогда можно написать

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi$$

При этом

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

Таким образом, координаты точки однозначно выражены через обобщенную координату, а уравнение связи превратилось в тождество.

### 35. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи

Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи. Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность, качение без проскальзывания, невесомый жесткий стержень.

Виртуальное перемещение. Это бесконечно малое перемещение точки, допускаемое связями в данный фиксированный момент времени.

Обозначим виртуальное перемещение символом  $\delta \vec{r}_l$ . Математически этот вектор определяется формулой

$$\delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

вытекающей из формулы (см. параграф 34)

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

Здесь  $l$  - номер материальной точки,  $\vec{r}_l$  - радиус-вектор этой точки,  $q_j$  - обобщенная координата системы с номером  $j$ ,  $\delta q_j$  - дифференциал («вариация») обобщенной координаты,  $s$  - число степеней свободы системы. В отличие от реального перемещения  $d\vec{r}_l$ , виртуальное перемещение  $\delta \vec{r}_l$  не обладает длительностью и не зависит от заданных сил.

Виртуальная работа. Это работа силы на виртуальном перемещении.

Обозначим виртуальную работу символом  $\delta A$ . Она равна скалярному произведению силы на виртуальное перемещение точки приложения силы:

$$\delta A = \vec{F} \delta \vec{r}$$

Идеальные связи. Это связи, для которых виртуальная работа сил реакции равна нулю:

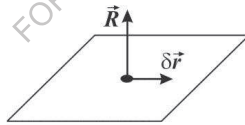
$$\delta A_R = \sum_{l=1}^N \vec{R}_l \delta \vec{r}_l = 0$$

Здесь  $\vec{R}_l$  – сила реакции, действующая на материальную точку с номером « $l$ », а  $N$  – число материальных точек системы. Рассмотрим примеры систем с идеальными связями.

Идеально гладкая плоскость. При движении материальной точки по идеально гладкой плоскости сила реакции направлена по нормали к плоскости, а векторы виртуальных перемещений лежат в плоскости. Следовательно, векторы  $\vec{R}$  и  $\delta \vec{r}$  перпендикулярны друг другу (рис. 35.1),

$$\delta A_R = \vec{R} \delta \vec{r} = 0$$

и связь идеальна. Гладкая поверхность любой формы также представляет собой идеальную связь.



Абсолютно гладкая плоскость

Рис. 35.1.

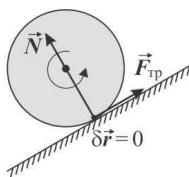
Качение без проскальзывания. Рассмотрим в качестве примера скатывание цилиндра по наклонной плоскости. В этом случае сила реакции, представляющая собой сумму силы нормального давления и силы трения, приложена к цилиндру в точке касания цилиндра и плоскости. При отсутствии проскальзывания виртуальное перемещение этой точки равно нулю (рис. 35.2):

$$\delta \vec{r} = 0$$

Следовательно,

$$\delta A_R = \vec{R} \delta \vec{r} = 0$$

и такая связь тоже является идеальной.



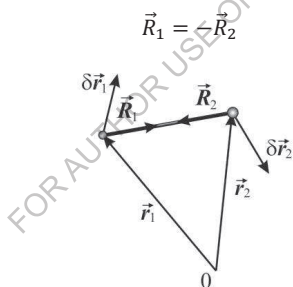
Качение без проскальзывания

Рис. 35.2.

Невесомый жесткий стержень. Рассмотрим две материальные точки, соединенные жестким невесомым стержнем. При произвольном движении такой системы виртуальная работа сил реакции выражается формулой

$$\delta A_R = \vec{R}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{R}_2 \delta \vec{r}_2$$

Здесь  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$  - силы, действующие на точки со стороны стержня,  $\delta \vec{r}_1$  и  $\delta \vec{r}_2$  - векторы виртуальных перемещений точек (рис. 35.3). По третьему закону Ньютона



Жесткий невесомый стержень

Рис. 35.3

Следовательно,

$$\delta A_R = \vec{R}_1 \delta \vec{r}_1 - \vec{R}_1 \delta \vec{r}_2 = (\vec{R}_1, \delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) = \vec{R}_1, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{R}_1 \delta \vec{r}$$

где

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

вектор, проведенный от второй точки к первой. Поскольку сила реакции  $\vec{R}_1$  направлена вдоль стержня, можем записать

$$\vec{R}_1 = \alpha \vec{r}$$

где  $\alpha$  - скалярная величина. При этом

$$\delta A_R = \vec{R}_1 \delta \vec{r} = \alpha \vec{r} \delta \vec{r} = \frac{1}{2} \alpha \delta (r^2) = \frac{1}{2} \alpha \delta (l^2)$$

где  $l$  - длина стержня. Для жесткого стержня

$$l = \text{const}$$

Следовательно

$$\delta A_R = 0$$

и связь идеальна.

Таким образом, класс систем с идеальными связями довольно широк. Это системы, содержащие идеально гладкие поверхности, качение без проскальзывания, невесомые стержни и нити.

### 36. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы

Уравнения движения идеальной голономной системы. Исключение сил реакции. Уравнение Даламбера – Лагранжа. Переход к обобщенным координатам. Уравнения Лагранжа относительно кинетической энергии. Обобщенная сила. Пример - математический маятник.

Уравнения движения идеальной голономной системы. Рассмотрим систему с идеальными голономными связями. Используя обозначения параграфов 34 и 35, для такой системы можем записать

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

$$\delta A_R = \sum_{l=1}^N \vec{R}_l \delta \vec{r}_l = 0$$

$$\delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

Первая из этих формул выражает радиус-векторы точек системы через обобщенные координаты. Вторая формула есть условие идеальности связей. Третья формула дает выражение для вектора виртуального перемещения материальной точки системы. В этих формулах  $N$  – полное число материальных точек системы,  $s$  – число степеней свободы системы.

Запишем уравнение движения для одной из материальных точек системы

$$m_l \ddot{\vec{r}}_l = \vec{F}_l + \vec{R}_l$$

Здесь  $\vec{r}_l$  – радиус-вектор точки с номером « $l$ »,  $\ddot{\vec{r}}_l$  – ее ускорение,  $\vec{F}_l$  – заданная сила, действующая на данную точку,  $\vec{R}_l$  – сила реакции. Индекс « $l$ » пробегает значения  $l = 1, 2, \dots, N$ .

Исключение сил реакции. Уравнение Даламбера – Лагранжа. Умножим правую и левую части уравнения движения скалярно на вектор виртуального перемещения точки и просуммируем полученные уравнения по всем точкам системы. Учитывая условие идеальности связей, получим

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \delta \vec{r}_l = 0$$

Это уравнение уже не содержит сил реакции. Оно называется уравнением Даламбера – Лагранжа.

Переход к обобщенным координатам. Используя выражение для вектора виртуального перемещения, перепишем полученное уравнение в виде

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

Поменяем порядок суммирования. Тогда

$$\sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^s (X_j - Q_j) \delta q_j = 0$$

где обозначено

$$X_j = \sum_{l=1}^N m_l \ddot{\vec{r}}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

и

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

Из независимости обобщенных координат следует, что

$$X_j = Q_j$$

для любого номера  $j$  от 1 до  $s$ .

Покажем, что величину  $X_j$  можно выразить через кинетическую энергию  $K$  системы и ее производные по обобщенным координатам и обобщенным скоростям, а именно,

$$X_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

В самом деле, по определению кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l v_l^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \vec{v}_l$$

где  $\vec{v}_l = \dot{\vec{r}}_l$  - скорость материальной точки с номером « $l$ ». Запишем это выражение в обобщенных координатах. Используя формулу

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

получим

$$\vec{v}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial t} = \vec{v}_l(q, \dot{q}, t)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

Подстановка выражения для скорости в формулу для кинетической энергии позволяет выразить кинетическую энергию системы через набор обобщенных координат, обобщенных скоростей и время:

$$K = K(q, \dot{q}, t)$$

Найдем производные этой функции по обобщенным координатам и обобщенным скоростям. Имеем

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \vec{v}_l = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \vec{v}_l = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} + \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial q_j} = X_j + \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

Отсюда

$$X_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

что и требовалось показать.

Уравнения Лагранжа относительно кинетической энергии. Итак, полученные уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

где индекс "j" пробегает значения

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа относительно кинетической энергии.

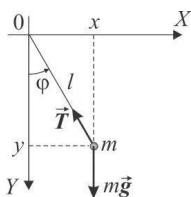
Обобщенная сила. Это величина, определяемая формулой

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

Размерность этой величины зависит от размерности обобщенной координаты. Если обобщенная координата измеряется в метрах, то обобщенная сила измеряется в ньютонах. Если обобщенная координата измеряется в радианах, то соответствующая ей обобщенная сила измеряется в ньютонах, умноженных на метр, и имеет физический смысл момента силы. Таким образом, обобщенная сила объединяет в себе понятия силы и момента силы, точнее, проекции силы на ось и момента силы относительно оси.



Пример – математический маятник. Рассмотрим в качестве примера плоский математический маятник (рис. 36.1).



Математический маятник  
Рис. 36.1.

Эта система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол  $\varphi$  отклонения маятника от вертикали. Тогда уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q$$

где

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

- кинетическая энергия маятника,

$$Q = m \vec{g} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$$

– обобщенная сила.

Введем декартовы координаты маятника  $x, y$ , направив ось  $x$  по горизонтали, а ось  $y$  по вертикали вниз. Тогда

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi$$

где  $l$  – длина маятника. Далее,

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = -l \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \dot{\varphi}^2, \quad K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$Q = m \vec{g} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = m g \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -m g l \sin \varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi}$$

Уравнение движения маятника приобретает вид

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Для сравнения напишем уравнения движения маятника в декартовых координатах, используя второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -T \sin \varphi, \quad m\ddot{y} = mg - T \cos \varphi, \quad x^2 + y^2 = l^2$$

Здесь  $T$  - сила натяжения нити. Этот пример показывает, что для определенного класса механических систем уравнения Лагранжа позволяют получить уравнения движения системы в наиболее простой и удобной форме.

### 37. Функция Лагранжа. Обобщенные импульсы

Уравнения движения идеальной голономной системы с потенциальными заданными силами. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа относительно функции Лагранжа. Обобщенный импульс. Закон изменения обобщенного импульса. Закон сохранения обобщенного импульса.

В этом параграфе мы рассмотрим еще более узкий класс механических систем и получим для них удобные уравнения движения.

Уравнения движения идеальной голономной системы с потенциальными заданными силами. Используя результаты параграфа 36, уравнения движения идеальной голономной системы запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

Здесь индекс "j" пробегает значения

$$j = 1, 2, \dots, s$$

$K = K(q, \dot{q}, t)$  – кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенные координаты, обобщенные скорости и время,  $Q_j$  – обобщенные силы,  $s$  – число степеней свободы системы.

Допустим, что заданные силы  $\vec{F}_l$  являются потенциальными силами. Тогда заданную силу, действующую на частицу системы, можно выразить через потенциальную энергию этой частицы (см. параграф 15)

$$\Pi_l = \Pi_l(\vec{r})$$

где  $\vec{r}$  обозначает совокупность радиус-векторов точек системы. А именно,

$$\vec{F}_l = -grad\Pi_l = -\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} + \vec{j} \frac{\partial \Pi_l}{\partial y_l} + \vec{k} \frac{\partial \Pi_l}{\partial z_l}\right)$$

В этом случае

$$\vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = -\left(\frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_l}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_l}{\partial z_l} \cdot \frac{\partial z_l}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial \Pi_l}{\partial q_j}$$

где потенциальная энергия частицы  $\Pi_l(\vec{r})$  выражена через набор обобщенных координат и время, т.е.

$$\Pi_l = \Pi_l(q, t)$$

Для голономной системы такая возможность всегда существует благодаря тому, что радиус-векторы точек системы выражаются через набор обобщенных координат и время, т.е.

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q, t)$$

Теперь выражение для обобщенной силы можно записать в виде

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = -\sum_{l=1}^N \frac{\partial \Pi_l}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{l=1}^N \Pi_l = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

где

$$\Pi = \sum_{l=1}^N \Pi_l = \Pi(q, t)$$

- потенциальная энергия системы, выраженная через набор обобщенных координат и время. Если связи в системе стационарны, то

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$$

и потенциальная энергия не будет явно зависеть от времени. Тогда она будет функцией только обобщенных координат системы:

$$\Pi = \Pi(q)$$

Итак, обобщенная сила равна взятой со знаком минус частной производной потенциальной энергии системы по соответствующей обобщенной координате:

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Теперь уравнения движения приобретают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial q_j} = 0$$

поскольку потенциальная энергия системы не зависит от обобщенных скоростей, т.е.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Функция Лагранжа. Введем функцию

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$$

Эта функция называется функцией Лагранжа или лагранжианом механической системы. Функция Лагранжа представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий системы, выраженную через набор обобщенных скоростей, обобщенных координат и время. Для систем со стационарными связями эта функция не зависит от времени, а зависит только от обобщенных координат и скоростей, т.е.

$$L = L(q, \dot{q})$$

Уравнения Лагранжа относительно функции Лагранжа. Уравнения движения приобретают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа относительно функции Лагранжа. Они применимы для систем с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами.

Обобщенный импульс. Это частная производная функции Лагранжа по обобщенной скорости:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Размерность обобщенного импульса определяется размерностью обобщенной координаты. Если обобщенная координата измеряется в метрах, то обобщенный импульс имеет размерность обычного импульса. Если обобщенная координата измеряется в радианах, то обобщенный импульс имеет размерность момента импульса. Таким образом, обобщенный импульс объединяет в себе два понятия классической механики: импульса и момента импульса. Точнее, он имеет физический смысл проекции импульса на ось или момента импульса относительно некоторой оси.

Закон изменения обобщенного импульса. Этот закон вытекает из уравнений Лагранжа, а именно,

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Согласно этой формуле, скорость изменения обобщенного импульса равна производной функции Лагранжа по соответствующей обобщенной координате. По своему физическому смыслу этот закон объединяет в себе второй закон Ньютона и теорему моментов.

Закон сохранения обобщенного импульса. Если частная производная функции Лагранжа по обобщенной координате равна нулю, т.е.

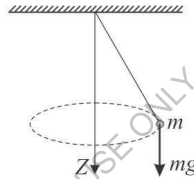
$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

то соответствующий обобщенный импульс сохраняется:

$$p_j = \text{const}$$

Этот закон называется законом сохранения обобщенного импульса. Он объединяет в себе законы сохранения импульса и момента импульса относительно оси. Обобщенную координату, которая не входит явно в функцию Лагранжа, называют циклической. Поэтому закон сохранения обобщенного импульса можно сформулировать и так: обобщенный импульс, соответствующий циклической координате, в процессе движения системы не меняется.

В качестве примера можно привести сферический математический маятник (рис. 37.1), для которого сохраняется момент импульса относительно вертикальной оси.



Сферический маятник

Рис. 37.1.

### 38. Уравнения Гамильтона. Канонические переменные

Канонические переменные. Уравнения движения идеальной голономной системы с потенциальными заданными силами. Функция Гамильтона. Уравнения Гамильтона.

Канонические переменные. Так называется набор обобщенных координат и обобщенных импульсов системы  $q, p$ . Уравнения движения, записанные в этих переменных, называются уравнениями Гамильтона.

Преимущество канонических переменных перед переменными  $q, \dot{q}$  состоит в том, что для обобщенных импульсов есть закон сохранения, которого нет для обобщенных скоростей системы. Переход от обобщенных скоростей  $\dot{q}$  к обобщенным импульсам системы  $p$  можно сделать с помощью уравнений (см. параграф 37)

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Выведем уравнения движения системы в канонических переменных.

Уравнения движения идеальной голономной системы с потенциальными заданными силами. Рассмотрим идеальную голономную систему с потенциальными заданными силами. Используя результаты параграфа 37, уравнения движения такой системы запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

или

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Здесь  $s$  - число степеней свободы системы,

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$$

- функция Лагранжа. Вычислим дифференциал функции Лагранжа

$$dL = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Используя написанные выше формулы, это выражение можно переписать так:

$$dL = \sum_{j=1}^s (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Функция Гамильтона. Введем функцию

$$H = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L$$

Найдем полный дифференциал этой функции. Согласно определению,

$$dH = \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - dL$$

Подставив сюда выражение для дифференциала функции Лагранжа, получим

$$dH = \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \dot{p}_j dq_j - p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или

$$dH = \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Выразим функцию  $H$  через набор обобщенных координат и импульсов системы. Тогда

$$H = H(q, p, t)$$

и

$$dH = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Функция

$$H = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L = H(q, p, t)$$

называется функцией Гамильтона или гамильтонианом системы.

Уравнения Гамильтона. Приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в двух формулах для  $dH$ , написанных выше, получим

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Эти уравнения называются уравнениями Гамильтона. Здесь

$$H = H(q, p, t)$$



- гамильтониан системы. Эта функция имеет размерность энергии.

### 39. Гамильтониан консервативной системы

Закон изменения гамильтониана. Консервативная система. Гамильтониан консервативной системы и ее полная механическая энергия.

Закон изменения гамильтониана. Найдем закон изменения гамильтониана. Для этого вычислим производную гамильтониана по времени. Используя уравнения Гамильтона (см. параграф 38), получаем

$$H = H(q, p, t)$$

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^s (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Итак, полная производная гамильтониана по времени равна частной производной по времени. Отсюда следует, что если гамильтониан не зависит от времени явно, то он не меняется в процессе движения системы.

Консервативная система. Так называется система, гамильтониан которой не зависит от времени:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Согласно полученной выше формуле, в этом случае  $\dot{H} = 0$ , т.е.

$$H = H(q, p) = const$$

Гамильтониан консервативной системы и ее полная механическая энергия. Покажем, что для консервативной системы гамильтониан имеет смысл ее полной механической энергии, т.е.

$$H = K + \Pi$$

Учтем, что в консервативной системе не должно быть нестационарных связей. Поэтому

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

$$K = K(q, \dot{q})$$

$$\Pi = \Pi(q)$$

Вычислим обобщенный импульс системы. Имеем

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

По определению кинетической энергии,

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l v_l^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \cdot \vec{v}_l$$

где

$$\vec{v}_l = \dot{\vec{r}}_l$$

есть скорость материальной точки системы. Подставив сюда выражение для радиус-вектора точки через обобщенные координаты

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

Получим

$$\vec{v}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Отсюда

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta$$

Меня в этой сумме порядок суммирования, запишем

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_{l=1}^N m_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta}$$

или

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

где введена матрица

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{l=1}^N m_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta} = K_{\beta\alpha} = K_{\beta\alpha}(q)$$

Это симметричная матрица, зависящая только обобщенных координат системы. Теперь

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

или

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j}$$

Здесь

$$\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{\alpha j}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{\beta j}$$

где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Теперь

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \delta_{\beta j} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \delta_{\alpha j}$$

или

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \delta_{\beta j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \dot{q}_\beta \sum_{\alpha=1}^s K_{\alpha\beta} \delta_{\alpha j}$$

или

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha K_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \dot{q}_\beta K_{j\beta} = \sum_{\alpha=1}^s K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha$$

Итак, получили

$$p_j = \sum_{\alpha=1}^s K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Эта система уравнений позволяет выразить обобщенные скорости системы через обобщенные импульсы. Теперь

$$\sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \sum_{\alpha=1}^s K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha = \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha=1}^s K_{j\alpha} \dot{q}_j \dot{q}_\alpha = 2K$$

где  $K$  – кинетическая энергия системы. Далее, по определению гамильтониана (см. параграф 38)

$$H = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L = 2K - (K - \Pi) = K + \Pi$$

что и требовалось доказать. Итак, гамильтониан консервативной системы имеет смысл ее полной механической энергии, выраженной через обобщенные координаты и импульсы:

$$H = K + \Pi = H(q, p)$$

Пример: материальная точка в потенциальном силовом поле. Построим гамильтониан материальной точки в постоянном потенциальном силовом поле. Система консервативна, поэтому гамильтониан равен сумме кинетической и потенциальной энергий системы. Материальная точка имеет 3 степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат декартовы координаты точки  $x, y, z$ . Тогда обобщенные скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ . Кинетическая энергия точки

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$p_y = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$p_z = \frac{\partial K}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Отсюда

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

и

$$K = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$H = K + \Pi = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

Эта формула выражает гамильтониан материальной точки в потенциальном силовом поле.

#### 40. Равновесие системы и его устойчивость

Равновесие механической системы. Условия равновесия. Устойчивость равновесия.

Равновесие механической системы. Равновесием называется состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

Условия равновесия. В состоянии равновесия сумма сил, действующих на каждую материальную точку системы, должна быть равна нулю:

$$\vec{F}_l + \vec{R}_l = 0$$

Здесь индекс "l" пробегает значения, нумерующие материальные точки системы

$$l = 1, 2, \dots, N$$

$\vec{F}_l$  - заданная сила,  $\vec{R}_l$  - сила реакции,  $N$  - число точек системы. В такой форме условие равновесия применимо для любой системы. Для систем с идеальными связями (см. параграф 35) можно исключить силы реакции и записать условие равновесия в виде

$$\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \delta \vec{r}_l = 0$$

Здесь

$$\delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

- вектор виртуального перемещения точки,  $s$  - число степеней свободы системы,  $q_1, q_2, \dots, q_s$  - набор обобщенных координат. Формула

$$\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \delta \vec{r}_l = 0$$

означает, что в положении равновесия виртуальная работа заданных сил должна быть равна нулю. В такой форме условие равновесия называют принципом виртуальных перемещений. Раскрывая выражение для вектора виртуального перемещения, получим

$$\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

Изменим здесь порядок суммирования. Тогда

$$\sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0$$

где

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

- обобщенная сила. Из независимости обобщенных координат следует, что в положении равновесия все обобщенные силы должны быть равны нулю:

$$Q_j = 0$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Наконец, используя формулу

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

полученную в параграфе 37, условие равновесия можно записать в виде

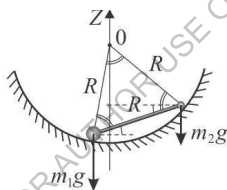
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$$

где

$$j = 1, 2, \dots, s$$

Это условие означает, что в положении равновесия потенциальная энергия системы должна иметь экстремумы по всем обобщенным координатам.

В качестве примера найдем условие равновесия гантели в гладкой сферической чашке (рис. 40.1).



Гантелька в сферической чашке  
Рис. 40.1.

Поставим задачу следующим образом. На внутренней поверхности гладкой сферической чашки лежит невесомый стержень с маленькими шариками массами  $m_1$  и  $m_2$  на концах. Длина стержня равна радиусу сферической чашки. Пренебрегая трением, найти угол  $\alpha$ , который составляет стержень с горизонталью в положении равновесия.

Данная система представляет собой систему со связями. Связи идеальны, голономны и стационарны. На гантельку действуют силы тяжести, направленные по вертикали, и силы реакции чашки. Так как силы трения отсутствуют, силы реакции направлены от каждого шарика в сторону центра сферической поверхности.

Проведем вертикальную ось  $z$  через центр сферической поверхности. Проведем плоскость через ось  $z$  и один из шариков гантельки – например, шарик с массой  $m_1$ . Силы, действующие на шарик массы  $m_1$ , лежат в этой плоскости. Сила реакции, действующая на шарик массы  $m_2$ , также должна лежать в этой плоскости. Иначе сумма сил, действующих на гантельку, будет отлична от нуля и она не сможет находиться в положении равновесия. Следовательно, шарик массы  $m_2$  лежит в этой же плоскости.

Итак, мы приходим к выводу, что в положении равновесия оба шарика гантельки и центр сферической поверхности чашки лежат в одной и той же вертикальной плоскости.

Положение гантельки в этой плоскости однозначно определяется углом  $\alpha$  (это искомый угол, который гантелька составляет с горизонталью). Это значит, что мы можем считать рассматриваемую систему системой с одной степенью свободы и выбрать в качестве обобщенной координаты угол  $\alpha$ . Условие равновесия системы можно записать в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0$$

Здесь  $\Pi = \Pi(\alpha)$  – потенциальная энергия гантельки в поле силы тяжести.

Найдем эту функцию. Направим ось  $z$  по вертикали вверх и выберем начало отсчета в центре сферической поверхности. Обозначая координаты шариков  $z_1$  и  $z_2$ , запишем

$$\Pi = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

Гантелька и линии, соединяющие шарики с центром сферической поверхности, образуют равносторонний треугольник. Углы этого треугольника равны  $60^\circ$ . Следовательно,

$$z_1 = -R \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$z_2 = -R \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

Теперь потенциальную энергию гантельки в чашке можно записать в виде

$$\Pi(\alpha) = -gR \cdot \left[ m_1 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + m_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \right]$$

Подставив это выражение в формулу

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0$$

получим

$$m_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - m_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0$$

Решая это уравнение относительно угла  $\alpha$ , находим

$$\alpha = \arctg \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \right]$$

Устойчивость равновесия. Равновесие называется устойчивым, если система, выведенная из этого состояния, и предоставленная самой себе, начинает двигаться в сторону положения равновесия. Устойчивость равновесия зависит от типа экстремума

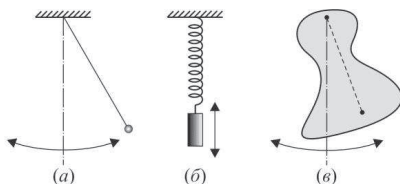


потенциальной энергии. Если этот экстремум имеет тип «минимум», то равновесие устойчиво.

#### 41. Колебания в системах с одной степенью свободы

Колебания. Период колебаний. Уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, частота и фаза колебаний. Определение частоты колебаний. Физический маятник. Математический маятник. Формула Гюйгенса. Пружинный осциллятор.

Колебания это повторяющееся движение в окрестности положения устойчивого равновесия системы. На рисунке 41.1 показаны примеры колебательных систем: математический маятник, пружинный осциллятор, физический маятник.



Примеры колебательных систем:  
математический маятник (а); пружинный осциллятор (б);  
физический маятник (в)

Рис. 41.1.

Период колебаний. Продолжительность одного полного колебания называется периодом колебаний. Период колебаний обозначается буквой  $T$  и измеряется в секундах.

Уравнение гармонических колебаний. Колебания в системах с одной степенью свободы описываются уравнением гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Здесь  $x$  - обобщенная координата, которая отсчитывается от положения равновесия системы,

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- вторая производная координаты по времени,  $t$  - время,  $\omega$  - постоянная величина, называемая частотой колебаний. Размерность этой величины – обратная секунда.

Общее решение уравнения гармонических колебаний имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Здесь  $A$  - постоянная величина, называемая амплитудой колебаний,  $\varphi$  - постоянная величина, называемая начальной фазой колебаний. График функции  $x(t)$  показан на

рисунке 41.2. Данное решение уравнения гармонических колебаний справедливо при любых значениях параметров  $A$  и  $\varphi$ . Конкретные значения этих параметров определяются начальными условиями.

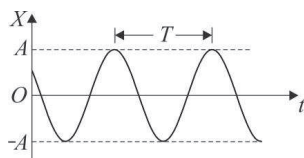


График функции, описывающей гармонические колебания

Рис. 41.2.

Амплитуда, частота и фаза колебаний. Амплитуда колебаний  $A$  имеет смысл максимального отклонения колеблющегося тела от положения равновесия. Частота колебаний  $\omega$  определяется формулой

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

где  $T$  - период колебаний. Фазой колебаний

$$\Phi = \omega t + \varphi$$

называется аргумент тригонометрической функции, описывающей колебания. Начальная фаза колебаний

$$\Phi(t = 0) = \varphi$$

определяет состояние системы в начальный момент времени. Например, если  $\varphi = 0$ , то колебание происходит по закону косинуса. Так движется маятник, отклоненный от положения равновесия и отпущенный без начальной скорости. Если же  $\varphi = \pi/2$ , то колебание происходит по закону синуса. Так движется маятник, выведенный толчком из положения равновесия.

Амплитуда и начальная фаза колебаний определяются начальными условиями. Используя формулу  $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ , можем записать

$$x(0) = A\cos\varphi \equiv x_0$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega\sin\varphi \equiv \dot{x}_0$$

Отсюда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \omega^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A}$$

$$\sin\varphi = -\frac{\dot{x}_0}{A\omega}$$

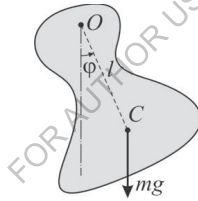
Эти формулы выражают амплитуду и начальную фазу колебаний через начальные условия.

Определение частоты колебаний. Чтобы найти частоту колебаний, нужно записать уравнение движения системы и привести его к стандартному виду уравнения гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

После этого частоту колебаний можно найти как квадратный корень из коэффициента при обобщенной координате  $x$ . Рассмотрим эту задачу на примере физического маятника.

Физический маятник. Физическим маятником называется тело произвольной формы, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения (рис. 41.3).



Физический маятник  
Рис. 41.3.

Колебания маятника происходят под действием силы тяжести. Физический маятник представляет собой систему с идеальной голономной связью и потенциальной заданной силой. Выведем уравнение колебаний маятника, используя уравнение Лагранжа.

Маятник имеет одну степень свободы:  $s = 1$ . В качестве обобщенной координаты выберем угол отклонения радиус-вектора центра масс маятника от вертикали. Обозначим этот угол буквой  $\varphi$ . Тогда обобщенная скорость

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

равна угловой скорости вращения маятника в данный момент времени. Кинетическая энергия маятника

$$K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$$

где  $I$  - момент инерции маятника относительно оси вращения. Потенциальная энергия

$$\Pi = -mgl\cos\varphi$$

где  $l$  - расстояние от оси вращения маятника до его центра масс. Функция Лагранжа

$$L = K - \Pi = I\dot{\varphi}^2/2 + mgl\cos\varphi = L(\varphi, \dot{\varphi})$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Подставляя в это уравнение функцию Лагранжа, получим

$$I\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

Таково уравнение колебаний произвольного физического маятника.

Теперь нужно привести его к виду уравнения гармонических колебаний. Для этого рассмотрим случай малых колебаний, когда угол отклонения маятника от положения равновесия много меньше одного радиана:

$$\varphi \ll 1$$

В этом случае

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

и уравнение колебаний приобретает вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

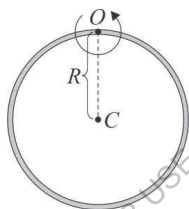
Это уравнение гармонических колебаний. Отсюда частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

Эта формула определяет частоту малых колебаний произвольного физического маятника. Здесь  $m$  - полная масса маятника,  $g$  - ускорение свободного падения,  $l$  - расстояние от оси вращения до центра масс маятника,  $I$  - момент инерции маятника относительно оси вращения.

Для расчетов частот колебаний конкретных физических маятников целесообразно использовать непосредственно формулу  $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$ . Тогда задача сводится к определению параметров  $m, l, I$ . Период колебаний маятника определяется формулой  $T = 2\pi/\omega$ .

В качестве примера найдем период колебаний обруча (рис. 41.4).



Обруч

Рис. 41.4.

В этом случае  $l = R$ , где  $R$  - радиус обруча. Момент инерции обруча найдем по теореме Гюйгенса – Штейнера:

$$I = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

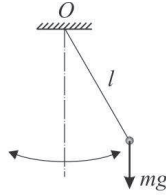
Здесь  $m$  - масса обруча. Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Математический маятник. Математический маятник представляет собой материальную точку, подвешенную на невесомой нити и способную совершать колебания под действием силы тяжести (рис. 41.5).



Математический маятник  
Рис. 41.5.

Математический маятник можно рассматривать как частный случай физического маятника. В этом случае

$$I = ml^2$$

и

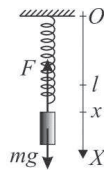
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Формула Гюйгенса. Период малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Здесь  $l$  - длина маятника,  $g$  - ускорение свободного падения. Эта формула называется формулой Гюйгенса.

Пружинный осциллятор. Вычислим период колебаний гири, подвешенной на пружине (рис. 41.6).



Пружинный осциллятор  
Рис. 41.6.

Пусть  $m$  - масса гири, а  $k$  - коэффициент упругости пружины. Уравнение движения гири в проекции на ось  $x$ , направленную вниз, имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l)$$

Здесь  $g$  - ускорение свободного падения,  $l$  - длина свободной пружины. Начало отсчета координаты  $x$  выбрано в точке подвеса пружины. Данное уравнение применимо для малых колебаний гири, когда справедлив закон Гука и сила упругости пружины может быть записана в виде

$$F_x = -k(x - l)$$

Перепишем уравнение движения гири в виде

$$m\ddot{x} + k \cdot \left(x - l - \frac{mg}{k}\right) = 0$$

Обозначим

$$y = x - l - \frac{mg}{k}$$

Тогда  $\ddot{x} = \ddot{y}$ , и уравнение движения приобретает вид

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

или

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Эта формула выражает частоту колебаний груза на пружине. Здесь  $m$  - масса груза,  $k$  - коэффициент упругости пружины. Период колебаний груза

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Зависимость периода колебаний от массы груза легко проверить на опыте. Уменьшая массу гири, наблюдаем уменьшение периода колебаний. Таким образом, опыт подтверждает полученную формулу.

#### 42. Физические эффекты в колебательных системах

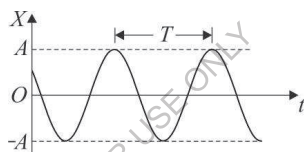
Гармонические колебания. Затухающие колебания. Нелинейные колебания. Параметрические колебания. Вынужденные колебания. Резонанс.

В этом параграфе мы рассмотрим процессы колебаний для более широкого класса систем. Гармонические колебания, рассмотренные выше, реализуются в идеализированных системах при целом ряде ограничений. А именно, при небольших амплитудах колебаний в системах с одной степенью свободы, идеальными голономными стационарными связями и потенциальными заданными силами. Однако такие условия реализуются не всегда. Что будет, если снять эти ограничения? Оказывается, что при этом возникает целый ряд новых физических эффектов. Мы познакомимся с ними в этом параграфе. Классификацию колебательных систем проведем на основе вида уравнения колебаний.

Гармонические колебания подробно рассмотрены выше (см. параграф 41). Они описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Такие колебания совершают, например, математический маятник и пружинный осциллятор при небольших амплитудах колебаний (рис. 42.1).



Гармонические колебания  
Рис. 42.1.

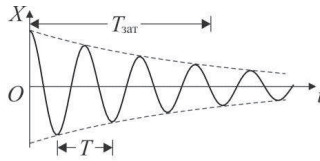
Затухающие колебания описываются уравнением

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Физическая причина затухания колебаний – действие силы трения. Для маятника или пружинного осциллятора это сила вязкого трения, действующая на колеблющееся тело со стороны воздуха. При небольших скоростях движения сила вязкого трения пропорциональна скорости тела. С этим связано появление в уравнении движения слагаемого, пропорционального скорости тела, т.е. первой производной координаты тела по времени.

График функции  $x(t)$ , описывающей решение уравнения затухающих колебаний, имеет вид затухающей синусоиды (рис. 42.2).





Затухающие колебания  
Рис. 42.2.

На графике можно выделить два характерных времени. Первое – это период колебаний  $T$ . Второе – это характерное время затухания колебаний  $T_{\text{зат}}$ . Это время можно определить как время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в два раза. Отношение времени затухания к периоду колебаний называется добротностью колебаний и обозначается буквой  $Q$ . Таким образом,

$$Q = \frac{T_{\text{зат}}}{T}$$

Добротность это безразмерная величина, показывающая сколько колебаний успеют произойти до того, как их амплитуда заметно уменьшится. Например, для струны музыкального инструмента  $Q \approx 10^3$ .

Нелинейные колебания описываются уравнением

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

где  $f(x)$  - некоторая нелинейная функция. Например, уравнение колебаний маятника имеет вид (см. параграф 41)

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

Отметим, что данное уравнение не имеет решения в элементарных функциях. Его решение может быть выражено только через специальную функцию, называемую эллиптическим интегралом. Легче всего это решение получить, используя закон сохранения энергии.

Рассмотрим колебания математического маятника. Пусть масса маятника равна  $m$ , а длина подвеса равна  $l$ . Положение маятника будем характеризовать углом  $\varphi$ , который составляет нить маятника с вертикалью. Кинетическая энергия маятника

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$$

Потенциальная энергия (относительно точки подвеса)

$$\Pi = -mgl \cos \varphi$$

По закону сохранения энергии

$$E = K + \Pi = \text{const}$$

Отсюда

$$\frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = E$$

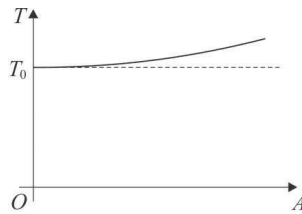
$$\dot{\varphi}^2 - 2 \frac{g}{l} \cos \varphi = \frac{2E}{ml^2}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{ml^2} + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi$$

Далее

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2} + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2E}{ml^2} + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi}} = \pm dt$$
$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2E}{ml^2} + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi}} = \pm \int_0^t dt = \pm t$$

Интеграл в этой формуле не выражается через элементарные функции. Он называется эллиптическим интегралом. Таким образом, искомая функция  $\varphi(t)$ , описывающая колебания маятника, выражена неявным образом через эллиптический интеграл. Эта функция табулирована, и можно проводить анализ нелинейных колебаний, пользуясь таблицами эллиптического интеграла. Другая возможность – решать численно уравнение нелинейных колебаний. Анализ выявляет основную особенность нелинейных колебаний. Она состоит в том, что период колебаний маятника зависит от амплитуды его колебаний. При этом, чем больше амплитуда, тем больше период (рис. 42.3). Это свойство называют неизохронностью колебаний.



Нелинейные колебания.  
Зависимость периода от амплитуды колебаний  
Рис. 42.3.

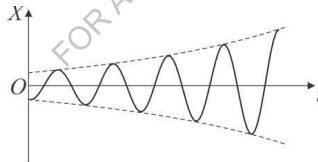
Параметрические колебания описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

где  $\omega^2(t)$  некоторая заданная функция времени. Такие колебания происходят в системах с нестационарными связями. В качестве примера можно привести математический маятник, длина которого меняется по заданному закону. В этом случае

$$\omega^2(t) = \frac{g}{l(t)}$$

Основной эффект в такой системе – параметрический резонанс. Это явление состоит в возрастании амплитуды колебаний маятника с течением времени (рис. 42.4).



Параметрический резонанс  
Рис. 42.4.

Параметрический резонанс наблюдается при гармонической модуляции длины маятника с частотой, вдвое превышающей собственную частоту колебаний маятника. Этот эффект можно продемонстрировать экспериментально с помощью математического маятника. Возрастание энергии колебаний при параметрическом резонансе происходит за счет работы силы, осуществляющей нестационарную связь. При этом полная механическая энергия маятника не сохраняется.

Вынужденные колебания это колебания, которые происходят под действием периодически меняющейся (обычно - гармонической) внешней силы. Такие колебания описываются уравнением

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

где

$$f(t) = f_0 \cos \omega t$$

Найдем решение уравнения вынужденных колебаний. Для этого воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Из нее следует, что

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} e^{i\varphi} + \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \equiv \frac{1}{2} e^{i\varphi} + k. c.$$

Здесь знак «к.с.» обозначает «комплексно-сопряженное выражение». Используя эти формулы, запишем

$$f(t) = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + k. c.$$

Подставив это выражение в уравнение колебаний, получим

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + k. c.$$

Ищем частное решение этого уравнения в виде

$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + k. c.$$

Величина  $A$  называется комплексной амплитудой колебаний. Модуль комплексной амплитуды представляет собой действительную амплитуду, а аргумент – фазу колебания. Тогда

$$\dot{x} = i\omega \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + k. c.$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + k. c.$$

Подставив эти выражения в уравнение колебаний, и сократив на экспоненту, получим

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha)A = f_0$$

Отсюда

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha}$$

Такова комплексная амплитуда вынужденных колебаний осциллятора. Отметим, что данное частное решение уравнения колебаний описывает установившийся режим колебаний. Полное решение уравнения содержит еще одно слагаемое, описывающее свободные колебания осциллятора (это решение однородного уравнения колебаний). Свободные колебания затухают с течением времени, поэтому спустя достаточно большое время, осциллятор будет совершать чисто вынужденные колебания, которые описываются приведенными выше формулами.

Резонанс. Основной эффект, присущий вынужденным колебаниям, это резонанс. Резонансом называется возрастание амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты изменения внешней силы с собственной частотой колебаний системы. Запишем выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$|A| = \left| \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha} \right|$$

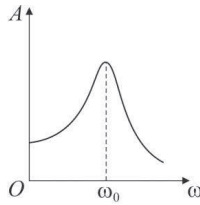
Анализ полученного решения показывает, что при медленных колебаниях внешней силы амплитуда колебаний осциллятора невелика. При этом фазы колебаний внешней силы и осциллятора почти одинаковы. С ростом частоты колебаний внешней силы амплитуда колебаний осциллятора возрастает, а фазы этих колебаний начинают заметно отличаться друг от друга. При резонансе амплитуда колебаний осциллятора достигает максимума, а фазы колебаний отличаются на  $\pi/2$ . Это следует из формулы

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha}$$

при

$$\omega = \omega_0$$

Далее, при увеличении частоты колебаний внешней силы амплитуда колебаний осциллятора начинает уменьшаться (рис. 42.5).



Вынужденные колебания.

Резонанс  
Рис. 42.5.

Заметим еще, что при  $\omega \rightarrow 0$  комплексная амплитуда вынужденных колебаний приобретает вид

$$A = \frac{f_0}{\omega^2}$$

Это значит, что фазы колебаний внешней силы и осциллятора совпадают. В другом предельном случае, когда  $\omega \rightarrow \infty$ , получим

$$A = -\frac{f_0}{\omega^2}$$

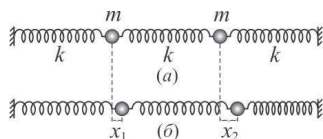
Это значит, что фазы указанных колебаний отличаются на  $\pi$ .

### 43. Нормальные колебания и нормальные координаты

Колебания связанных осцилляторов. Нормальные координаты. Собственные частоты колебаний. Нормальные колебания.

В этом параграфе мы рассмотрим особенности колебаний в системах с несколькими степенями свободы.

Колебания связанных осцилляторов. Рассмотрим два шарика, связанные пружинами друг с другом и с неподвижными стенками (рис. 43.1). Шарик и пружины будем считать, для простоты, одинаковыми. Массу шарика обозначим  $m$ , коэффициент упругости пружины обозначим  $k$ . Будем считать, что шарик может без трения двигаться вдоль горизонтальной прямой. Направим вдоль этой прямой координатную ось  $x$ , и обозначим координаты шариков через  $x_1$  и  $x_2$ .



Связанные осцилляторы.

Положения маятников в положении равновесия (а); положения маятников в произвольный момент колебаний (б)

Рис. 43.1.

Напишем уравнения движения шариков, используя второй закон Ньютона и закон Гука. Получим

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

Обратим внимание на то, что уравнения движения осцилляторов получились связанными. Ни одно из них не является уравнением гармонических колебаний. Сложим эти уравнения, а затем вычтем одно уравнение из другого. Получим

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_2 + x_1)$$

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1)$$

или

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0$$

где

$$\theta_1 = x_1 + x_2$$

$$\theta_2 = x_2 - x_1$$

и

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Видим, что для суммы и разности координат шариков получились независимые уравнения движения, причем каждое из них имеет вид уравнения гармонических колебаний. Мы можем принять величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  за новые обобщенные координаты. Старые координаты  $x_1$  и  $x_2$  выражаются через них следующим образом

$$x_1 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Нормальные координаты. Величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  являются нормальными координатами для данной системы. Так называются координаты, которые при любых движениях системы меняются независимо друг от друга. Каждая из нормальных координат колеблется по гармоническому закону на своей собственной частоте. Эти частоты называются собственными частотами колебаний системы.

Собственные частоты колебаний системы. У системы связанных осцилляторов есть несколько частот, на которых она может совершать гармонические колебания. Эти частоты называются собственными частотами колебаний системы. Число собственных частот равно числу степеней свободы системы.

Нормальные колебания. Нормальными колебаниями называются гармонические колебания на одной из собственных частот системы. Такие колебания реализуются, если отлична от нуля только одна нормальная координата. Если это первая нормальная координата, то, как видно из формул

$$x_1 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

шарики будут совершать гармонические колебания на первой собственной частоте. Если же отлична от нуля только вторая нормальная координата, то шарики будут совершать гармонические колебания на второй собственной частоте.

Для того чтобы наблюдать нормальные колебания, нужно подобрать соответствующие начальные условия. Для наблюдения первого нормального колебания потребуем, чтобы вторая нормальная координата все время оставалась равной нулю:

$$\theta_2(t) = 0$$



Для этого необходимо и достаточно, чтобы в начальный момент времени эта координата и ее производная по времени были равны нулю:

$$\theta_2(t = 0) = 0$$

$$\dot{\theta}_2(t = 0) = 0$$

Используя написанные выше формулы, получаем

$$x_1(t = 0) = x_2(t = 0)$$

и

$$\dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_2(t = 0)$$

Положим, для простоты,

$$\dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_2(t = 0) = 0$$

Тогда для возбуждения первого нормального колебания достаточно выполнить только одно условие:

$$x_1(t = 0) = x_2(t = 0)$$

Это означает, что нужно сдвинуть оба шарика на одно и то же расстояние в одну и ту же сторону (рис. 43.2а). При таких колебаниях средняя пружина не деформируется, и каждый шарик движется под действием только одной пружины.

Второе нормальное колебание. Что наблюдать его, потребуем, чтобы первая нормальная координата оставалась все время равной нулю:

$$\theta_1(t) = 0$$

Для этого необходимо и достаточно, что в начальный момент времени эта координата и ее производная по времени были равны нулю:

$$\theta_1(t = 0) = 0$$

$$\dot{\theta}_1(t = 0) = 0$$

Используя написанные выше формулы, получаем

$$x_1(t = 0) = -x_2(t = 0)$$

и

$$\dot{x}_1(t = 0) = -\dot{x}_2(t = 0)$$

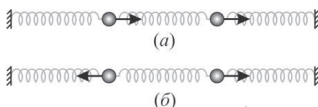
Положим, для простоты,

$$\dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_2(t = 0) = 0$$

Тогда для возбуждения второго нормального колебания достаточно выполнить только одно условие:

$$x_1(t = 0) = -x_2(t = 0)$$

Это означает, что нужно сдвинуть оба шарика на одно и то же расстояние в разные стороны (рис. 43.2б). При таком колебании деформируются все три пружины. Поэтому его частота выше, чем частота первого нормального колебания. Эксперименты со связанными осцилляторами подтверждают эти результаты.



Начальные условия для возбуждения нормальных колебаний:  
 первое нормальное колебание (а);  
 второе нормальное колебание (б)

Рис. 43.2.

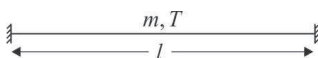
В заключение этого параграфа отметим, что введенные здесь понятия нормальных колебаний и нормальных координат сохраняют свой смысл для систем с любым числом степеней свободы.

#### 44. Колебания струны

Волновое уравнение. Решение волнового уравнения. Бегущие волны. Скорость распространения волны. Стоячая волна. Период и частота колебаний струны. Длина волны и волновое число. Граничные условия. Основной тон. Обертоны. Узлы и пучности стоячей волны.

В этом параграфе мы обратимся к механике волнового процесса. Волна это колебание, распространяющееся в сплошной среде. Волны могут распространяться в воздухе, в воде, в земной коре, в упругом теле и т.п. Здесь мы рассмотрим волновое движение на примере волны, распространяющейся в натянутой струне.

Волновое уравнение. Выведем уравнение колебаний струны (рис. 44.1). Обозначим массу струны  $m$ , а ее длину  $l$ .



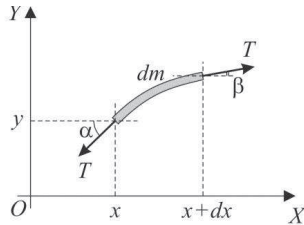
Струна

Рис. 44.1.

Введем линейную плотность струны

$$\rho = \frac{m}{l}$$

Силу натяжения струны обозначим  $T$ . Направим ось  $x$  вдоль струны, ось  $y$  поперек струны в направлении ее колебаний (рис. 44.2). Выделим элемент струны, лежащий в области от точки с координатой  $x$  до точки с координатой  $x + dx$ . Массу этого элемента обозначим  $dm$ . Она приближенно выражается формулой  $dm = \rho dx$ .



К выводу уравнения колебаний струны  
Рис. 44.2.

Запишем уравнение движения этого элемента струны в проекции на ось  $y$

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \sin \beta - T \sin \alpha$$

Здесь  $\alpha$  - угол между осью  $x$  и касательной к струне в точке с координатой  $x$ ,  $\beta$  - угол между осью  $x$  и касательной к струне в точке с координатой  $x + dx$ . Действием силы тяжести пренебрегаем. Различием сил натяжения струны в точках с координатами  $x$  и  $x + dx$  также пренебрегаем. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  считаем малыми. В этом случае

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = y'(x)$$

$$\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta = y'(x + dx)$$

Здесь

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Отсюда

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot [y'(x + dx) - y'(x)] = T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \rho dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Сократив на  $dx$ , получим

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

где

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- постоянная величина, имеющая размерность скорости. Уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

называется волновым уравнением.

Решение волнового уравнения имеет вид

$$y(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  - произвольные (дифференцируемые) функции своих аргументов. Данное решение можно проверить прямой подстановкой в уравнение. Здесь  $x$  - координата элемента струны,  $t$  - время,  $v = \sqrt{T/\rho}$ ,  $T$  - сила натяжения струны,  $\rho$  - ее линейная плотность.

Бегущие волны. Полученное решение волнового уравнения описывает бегущие волны. Функция  $f_1(x - vt)$  описывает волну, бегущую вдоль оси  $x$ . В самом деле, зафиксируем аргумент этой функции, т.е. положим

$$x - vt = const$$

Тогда

$$dx - vdt = 0$$

и

$$dx/dt = v$$

Таким образом, функция  $f_1(x - vt)$  описывает импульс произвольной формы, бегущий вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ . Аналогично, функция  $f_2(x + vt)$  описывает импульс, бегущий с такой же скоростью против оси  $x$ .

Волна колебаний в струне называется поперечной, т.к. направление движения элементов струны перпендикулярно направлению распространения волны.

Скорость распространения волны в струне определяется формулой

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Здесь  $T$  - сила натяжения струны,  $\rho$  - ее линейная плотность. Согласно этой формуле, скорость распространения волны должна возрастать с ростом натяжения струны.

Стоячая волна это волна, которая описывается произведением функции времени на функцию координат. Будем искать решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

в виде

$$y(x, t) = X(x) \cdot \theta(t)$$

Подставив это решение в уравнение, получим

$$X\ddot{\theta} = v^2 X''\theta$$

Здесь

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$X'' = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Разделим переменные. Для этого перепишем полученное уравнение в виде

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{v^2 X''}{X}$$

Левая часть этого уравнения не зависит от координаты, а правая часть не зависит от времени. Поэтому обе эти части не зависят ни от координаты, ни от времени. Следовательно, это есть постоянная величина. Итак,

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{v^2 X''}{X} = const$$

Размерность этой величины обратное время в квадрате или квадрат частоты. Кроме того, эта постоянная величина должна быть отрицательной. Иначе решением уравнений для функций  $X(x)$  и  $\theta(t)$  будут экспоненциально нарастающие функции, а это противоречит характеру колебаний струны. Поэтому обозначим постоянную

$$const = -\omega^2$$

Тогда уравнения принимают вид

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{v^2 X''}{X} = -\omega^2$$

Отсюда для функции  $\theta(t)$  получаем уравнение

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

Это уравнение гармонических колебаний. Запишем частное решение этого уравнения в виде

$$\theta(t) = A \sin \omega t$$

Для функции  $X(x)$  получаем уравнение

$$X'' + \frac{\omega^2}{v^2} X = 0$$

или

$$X'' + k^2 X = 0$$

где

$$k = \frac{\omega}{v}$$

- постоянная величина, имеющая размерность обратной длины. Уравнение

$$X'' + k^2 X = 0$$

также является уравнением гармонических колебаний. Запишем его частное решение в виде

$$X(x) = B \sin kx$$

Таким образом, частное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

имеет вид

$$y(x, t) = \text{const} \cdot \sin \omega t \cdot \sin kx$$

где

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Согласно этому решению, движение каждого элемента струны происходит по гармоническому закону. Амплитуда колебаний различна у разных элементов струны и распределена вдоль струны по гармоническому закону. Такое движение струны называют стоячей волной.

Отметим здесь несколько понятий, характеризующих волновое движение.

Период и частота колебаний струны. Период колебаний любого элемента струны  $T$  связан с частотой колебаний струны  $\omega$  формулой

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Длина волны и волновое число. Длина волны  $\lambda$  определяется как минимальное расстояние между двумя элементами струны, колебания которых происходят в одной и той же фазе. Длина волны равна произведению скорости распространения волны на период колебаний:

$$\lambda = vT$$

Волновое число это величина, определяемая формулой

$$k = \frac{\omega}{v}$$

или

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Граничные условия. На концах струны должны выполняться граничные условия

$$y(x = 0) = 0$$

$$y(x = l) = 0$$

Первое из этих условий выполняется автоматически за счет выбора частного решения волнового уравнения вида

$$y(x, t) = \text{const} \cdot \sin \omega t \cdot \sin kx$$

Второе граничное условие приводит к уравнению

$$\sin kl = 0$$

решение которого можно представить в виде

$$kl = n\pi$$

где

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

любое натуральное число. Это граничное условие выделяет допустимые значения волнового числа

$$k_n = n \frac{\pi}{l}$$

и частоты колебаний струны

$$\omega_n = vk_n$$

или

$$\omega_n = n \frac{\pi}{l} v = n \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Таким образом, существует дискретный набор частот колебаний струны, определяемый этой формулой. Теперь все частные решения волнового уравнения можно перенумеровать числом  $n$  и записать



$$y_n(x, t) = \text{const} \cdot \sin \omega_n t \cdot \sin k_n x$$

$$k_n = n \frac{\pi}{l}$$

$$\omega_n = v k_n$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

где число  $n$  пробегает значения

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Допустимые длины волн таковы, что

$$\frac{\lambda_n}{2} n = l$$

Это значит, что на длине струны укладывается целое число полуволен.

Основной тон. Решение, соответствующее  $n = 1$ , называется основным тоном колебаний. Оно описывается формулами

$$y_1(x, t) = \text{const} \cdot \sin \omega_1 t \cdot \sin k_1 x$$

$$k_1 = \frac{\pi}{l}$$

$$\omega_1 = v k_1$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

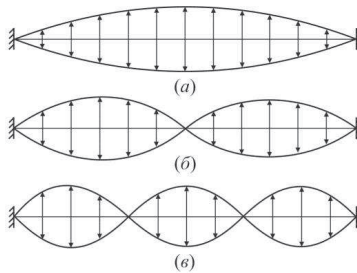
Частота основного тона

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

самая низкая из всех возможных частот колебаний струны. При таком колебании максимальную амплитуду колебания имеет центральный элемент струны.

Обертоны это колебания струны на частотах, больших, чем частота основного тона. Решения волнового уравнения, соответствующие числам

$n = 2, 3, \dots$ , называют, соответственно, первым, вторым, и более высокими обертонами (рис. 44.3). Согласно полученным формулам, частоты обертонов кратны частоте основного тона струны.



Стойкие волны в струне: основной тон (а);  
первый обертон (б); второй обертон (в)  
Рис. 44.3.

Узлы и пучности стоячей волны. Так называют точки, в которых амплитуды колебаний элементов струны имеют, соответственно, минимальные (нулевые) и максимальные значения. Например, узел первого обертона находится посередине струны, а пучности – посередине между узлами волны. С точки зрения общего решения волнового уравнения, наличие узлов у стоячей волны можно объяснить явлением интерференции волн, т.е. взаимной компенсацией действия волн в некоторых точках пространства.

Соотношение амплитуд основного тона и обертонов определяет характеристику звука, называемую тембром.

#### 45. Уравнения динамики сплошной среды

Переменные и параметры, характеризующие звуковую волну. Уравнение движения элемента идеальной сплошной среды. Уравнение непрерывности. Уравнение состояния среды. Система уравнений динамики идеальной сплошной среды.

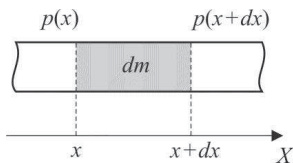
В этом параграфе мы выведем уравнения, необходимые для описания звуковой волны. Для простоты ограничимся случаем, когда звук распространяется в одном направлении. Физически такая волна реализуется при распространении звука в трубке. Вдоль трубы направим координатную ось  $x$ , площадь поперечного сечения трубы обозначим буквой  $S$ .

Переменные и параметры, характеризующие звуковую волну. Это координата  $x$  (метры), время  $t$  (секунды), скорость движения элемента среды  $v$  (метры в секунду), давление  $p$  (паскали), плотность  $\rho$  (килограммы на кубический метр). Скорость движения элемента среды  $v$  можно рассматривать как скорость маленького пробного тела, которое двигается под действием звуковых колебаний, но не возмущает звуковую волну.

Уравнение движения элемента идеальной сплошной среды. Рассмотрим маленький элемент сплошной среды (рис. 45.1), заключенный в трубке с площадью поперечного

сечения  $S$  между плоскостями с координатами  $x$  и  $x + dx$ . Массу данного элемента среды  $dm$  можно представить в виде

$$dm = \rho S dx$$



К выводу уравнения движения  
элемента сплошной среды

Рис. 45.1.

Подсчитаем сумму сил, действующих на данный элемент среды со стороны соседних с ним элементов. Сила, действующая на элемент на его левой границе

$$F_x(x) = Sp(x)$$

Сила, действующая на элемент на его правой границе

$$F_x(x + dx) = -Sp(x + dx)$$

Сумма этих сил

$$F_x = F_x(x) + F_x(x + dx)$$

или

$$F_x = Sp(x) - Sp(x + dx)$$

Будем считать величину  $dx$  бесконечно малой, и разложим в ряд величину  $p(x + dx)$  в окрестности точки  $x$ . Получим

$$p(x + dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Подставив это в выражение для  $F_x$ , и сократив подобные члены, получим

$$F_x = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$dm \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} = F_x$$

Отсюда

$$dm \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

или

$$\rho S dx \frac{\partial v_x}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

или

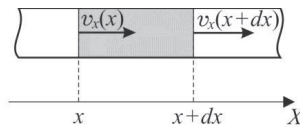
$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

или

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Это уравнение выражает второй закон Ньютона, записанный для элемента среды. Здесь этот закон записан (для простоты) в скалярном виде в проекции на одну из осей координат. Данное уравнение получено без учета сил вязкого трения. Поэтому оно называется уравнением движения идеальной сплошной среды.

Уравнение непрерывности. Рассмотрим маленький элемент объема трубки (рис. 45.2), заключенный между плоскостями с координатами  $x$  и  $x + dx$ , и подсчитаем изменение массы среды в этом элементе объема за малый промежуток времени  $dt$ .



К выводу уравнения непрерывности

Рис. 45.2.

Количество вещества, приходящего за время  $dt$  в данный элемент объема трубки через его левую границу

$$dm^{(+)} = \rho(x) S v_x(x) dt$$

Количество вещества, выходящего из данного элемента объема трубки через его правую границу

$$dm^{(-)} = \rho(x + dx)Sv_x(x + dx)dt$$

Приращение массы вещества в данном элементе объема трубки за время  $dt$

$$dm = dm^{(+)} - dm^{(-)}$$

Отсюда

$$dm = \rho(x)Sv_x(x)dt - \rho(x + dx)Sv_x(x + dx)dt$$

Будем считать величину  $dx$  бесконечно малой, и разложим в ряд величину

$$\rho(x + dx)v_x(x + dx)$$

в окрестности точки  $x$ . Получим

$$\rho(x + dx)v_x(x + dx) = \rho(x)v_x(x) + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dx$$

Подставив это в выражение для  $dm$ , и сократив подобные члены, получим

$$dm = -S \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dt$$

Здесь

$$Sdx = dV$$

элемент объема среды. По определению плотности,

$$\frac{dm}{dV} = d\rho$$

приращение плотности среды. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0$$

Это уравнение выражает закон сохранения вещества в дифференциальной форме. Оно называется уравнением непрерывности.

Уравнение состояния среды. Уравнением состояния называют уравнение, связывающее давление и плотность среды. В общем случае оно записывается в виде

$$p = p(\rho)$$

Уравнение состояния описывает упругость среды. Это может быть, в частности, уравнение изотермического или адиабатического процессов.

Система уравнений динамики идеальной сплошной среды это система, включающая в себя уравнение движения, уравнение непрерывности и уравнение состояния:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0$$

$$p = p(\rho)$$

Отметим, что в общем случае эта система представляет собой систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Она записана без учета сил вязкого трения. Здесь  $t$  - время,  $x$  - координата, отсчитываемая в направлении распространения звуковой волны,  $v_x(x, t)$  - скорость движения элемента среды (пробного тела) в проекции на ось  $x$ ,  $p(x, t)$  - давление,  $\rho(x, t)$  - плотность среды в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$ .

#### 46. Звуковая волна

Приближение слабой звуковой волны. Линеаризация уравнений. Волновое уравнение. Скорость звука.

Приближение слабой звуковой волны. Рассмотрим слабую звуковую волну, которая мало меняет параметры среды, в которой она распространяется. В этом случае можно написать

$$p = p_0 + p'$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

Здесь  $p_0$  и  $\rho_0$  - равновесные давление и плотность среды,  $p'$  и  $\rho'$  - малые возмущения давления и плотности, наводимые звуковой волной.

Линеаризация уравнений. Линеаризуя уравнения динамики идеальной сплошной среды (см. параграф 45) по малым параметрам  $p'$  и  $\rho'$ , получим

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$p' = \text{const} \cdot \rho'$$

Последнее уравнение можно пояснить следующим образом. Ясно, что с ростом давления плотность среды должна увеличиваться. Поэтому  $p = p(\rho)$  есть некоторая возрастающая функция. Выбираем на графике этой функции рабочую точку с координатами  $p_0$  и  $\rho_0$  и в малой окрестности этой точки аппроксимируем кривую  $p = p(\rho)$  прямой линией. Уравнение этой линии и выражается формулой  $p' = \text{const} \cdot \rho'$ .

Коэффициент пропорциональности в этой формуле имеет размерность квадрата скорости. Поэтому обозначим

$$\text{const} = c_0^2$$

где  $c_0$  - некоторая скорость (постоянная скорость, характеризующая звук в среде).  
Формула

$$p' = c_0^2 \cdot \rho'$$

одна из важных формул акустики. Она выражает прямую пропорциональность возмущений давления и плотности в звуковой волне.

Волновое уравнение. Дифференцируя уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

по времени, и меняя порядок вычисления частных производных, получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) = 0$$

Подставив сюда выражение

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

вытекающее из уравнения непрерывности, находим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - c_0^2 \rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

Таким образом, для скорости движения элемента среды мы получили волновое уравнение. Это означает, что звук распространяется в сплошной среде в виде волны. Аналогичные уравнения можно получить и для возмущений давления и плотности среды.

Отметим, что звуковая волна является продольной, поскольку направление движения частиц среды совпадает с направлением распространения волны.

Скорость звука. Из полученного волнового уравнения следует, что звуковая волна распространяется в сплошной среде со скоростью

$$c_0 = \sqrt{\frac{p'}{\rho'}}$$

Поскольку величины  $p'$  и  $\rho'$  представляют собой малые возмущения давления и плотности, их можно заменить дифференциалами соответствующих величин. Тогда получим

$$c_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Используя уравнение адиабатического процесса, можно показать, что для звуковой волны в воздухе

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

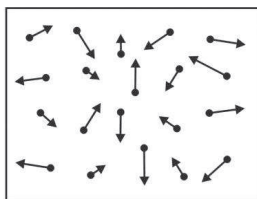
где  $\gamma = 7/5$  – показатель адиабаты,  $p_0$  и  $\rho_0$  – давление и плотность воздуха при нормальных условиях. Полагая  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ ,  $\rho_0 = 1.3 \text{ кг/м}^3$ , получим  $c_0 = 330 \text{ м/с}$ . Измерение скорости звука в воздухе подтверждает эту оценку.

#### 47. Случайные величины и вероятности

Случайное событие. Вероятность случайного события. Аксиома сложения вероятностей. Аксиома умножения вероятностей. Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины. Распределение плотности вероятности. Условие нормировки. Правило вычисления средних. Среднее значение случайной величины. Дисперсия случайной величины. Гауссова случайная величина. Интеграл Пуассона. Многомерная плотность вероятности. Условие нормировки. Правило вычисления средних. Понижения порядка распределения. Независимые случайные величины.



Пытаясь построить теорию строения вещества, мы сталкиваемся с проблемой описания системы, состоящей из большого числа частиц. Такой системой является, например, газ в сосуде (рис. 47.1).



Движение молекул в сосуде газом  
Рис. 47.1.

Подобные системы трудно описать на языке закона движения. Поэтому для их описания вводят новое понятие – вероятность состояния. Чтобы ввести это понятие, нам нужно вспомнить некоторые понятия теории вероятности.

Случайное событие это событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторить.

Возможность изучения случайных событий появляется именно благодаря возможности их многократного наблюдения. Бросая кубик, мы не можем предсказать заранее, какая его грань окажется верхней. Но повторяя опыт много раз, можем заметить, что все грани выпадают примерно одинаковое количество раз. Задача теории вероятностей уловить и количественно описать подобные закономерности.

Вероятность случайного события это отношение числа появлений события в серии испытаний к полному числу испытаний, когда число испытаний стремится к бесконечности:

$$p(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

Согласно этому определению, вероятность есть действительная неотрицательная величина, которая может принимать значения из области

$$0 \leq p \leq 1$$

Случай  $p = 0$  соответствует невозможному событию, случай  $p = 1$  соответствует достоверному событию. Например, вероятность выпадения цифры «5» на верхней грани игрального кубика равна  $1/6 : p(5) = 1/6$ .

Аксиома сложения вероятностей. Вероятность наступления одного из взаимоисключающих событий равна сумме их вероятностей:

$$p(A + B) = p(A) + p(B)$$

Например, вероятность выпадения четного числа на верхней грани кубика

$$p(2 + 4 + 6) = p(2) + p(4) + p(6) = 1/2$$

Аксиома умножения вероятностей. Вероятность наступления нескольких независимых случайных событий равна произведению их вероятностей:

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$$

Например, вероятность выпадения двух «1» на верхних гранях двух кубиков

$$p(1 \cdot 1) = p(1) \cdot p(1) = 1/36$$

Эти аксиомы проверяются опытным путем.

Случайная величина это величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно многократно повторить. Такой величиной является, например, координата броуновской частицы в определенный момент времени.

Дискретные и непрерывные случайные величины. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной называется случайная величина, которая может принимать конечное или бесконечное, но счетное множество значений. Все эти значения можно перенумеровать и каждому из них поставить в соответствие некоторую вероятность. К дискретным случайным величинам относится число молекул газа в выделенной части сосуда, число столкновений, которые испытывает молекула газа за некоторый промежуток времени и т.п.

Непрерывная случайная величина это величина, принимающая бесконечное и несчетное множество значений из некоторого интервала. Таковы, например, координаты и скорости молекул газообразной среды, координаты и скорости броуновских частиц и т.п. Непрерывные случайные величины характеризуют функцией, называемой распределением плотности вероятности.

Распределение плотности вероятности это отношение вероятности попадания случайной величины в малый интервал вблизи заданного значения к величине этого интервала в пределе, когда интервал стремится к нулю:

$$w(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Это неотрицательная величина

$$w(x) \geq 0$$

размерность которой обратна размерности ее аргумента:  $[w(x)] = 1/[x]$ .

Условие нормировки. Распределение плотности вероятности подчиняется условию нормировки

$$\int w(x)dx = 1$$

Это следствие аксиомы сложения вероятностей. Интеграл от плотности вероятности имеет смысл вероятности того, что случайная величина примет одно из всех своих возможных значений.

Правило вычисления средних. Среднее значение функции  $f(x)$  случайной величины  $x$  вычисляется по формуле

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)w(x)dx$$

Наиболее важные средние это среднее значение самой случайной величины и ее дисперсия.

Среднее значение случайной величины вычисляется по формуле

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x} = \int xw(x)dx$$

Дисперсия случайной величины это средний квадрат отклонения случайной величины от ее среднего значения. Дисперсия обозначается  $\sigma^2$  и вычисляется по формуле

$$\sigma^2 = \int (x - \bar{x})^2 w(x)dx$$

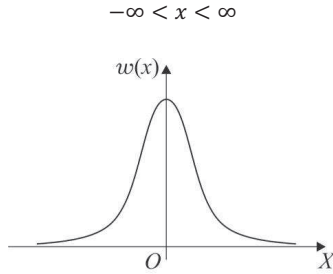
В общем случае

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Гауссова случайная величина. Гауссовой или нормальной называется случайная величина, для которой распределение плотности вероятности описывается формулой (рис. 47.2)

$$w(x) = C \cdot e^{-\alpha x^2}$$

Здесь  $C$  - постоянная величина, определяемая условием нормировки,  $\alpha$  - параметр распределения. Гауссова случайная величина может принимать любое вещественное значение:



Распределение Гаусса

Рис. 47.2.

Отметим важное свойство гауссовой статистики. Оно заключается в том, что любая линейная комбинация гауссовых случайных величин также является гауссовой случайной величиной. Иными словами, линейные преобразования не меняют гауссовой статистики случайной величины.

Интеграл Пуассона. Для вычисления нормировочной постоянной в распределении Гаусса нужно вычислить интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Этот интеграл называется интегралом Пуассона. Вычислим его. Сначала найдем квадрат величины  $I$ . Имеем:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Будем рассматривать величины  $x$  и  $y$  как декартовы координаты точки на плоскости. Тогда записанный интеграл можно рассматривать как интеграл по плоскости. Введем полярные координаты точки  $r$  и  $\varphi$ . В этих координатах элемент площади приобретает вид

$$dS = r dr d\varphi$$

Теперь искомым интеграл преобразуется следующим образом:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2) = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi$$

Отсюда

$$I = \sqrt{\pi}$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Многомерная плотность вероятности это отношение вероятности попадания нескольких случайных величин в малые интервалы вблизи заданных значений к произведению величин интервалов в пределе, когда интервалы стремятся к нулю. Например, двумерная плотность вероятности

$$w(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{p(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

Отметим основные свойства этой функции. Плотность вероятности неотрицательна

$$w(x, y) \geq 0$$

Ее размерность обратна размерности произведения ее аргументов:

$$[w(x, y)] = \frac{1}{[xy]}$$

Условие нормировки

$$\iint w(x, y) dx dy = 1$$

Правило вычисления средних:

$$\langle f(x, y) \rangle = \iint f(x, y) w(x, y) dx dy$$

Понижение порядка распределения

$$w_1(x) = \int w(x, y) dy$$

$$w_2(y) = \int w(x, y) dx$$

Это следствие аксиомы сложения вероятностей.

Независимые случайные величины. Если случайные величины независимы, то многомерная плотность вероятности равна произведению одномерных плотностей вероятности.

Это следствие аксиомы умножения вероятности. Например, для двух независимых случайных величин

$$w(x, y) = w_1(x) \cdot w_2(y)$$

Рассмотрим в качестве примера единичный вектор  $\vec{e}$ , имеющий случайное направление в пространстве. Будем считать, что все направления этого вектора равновероятны. Найдем распределение плотности вероятности  $w(\theta, \varphi)$  для углов сферической системы координат  $\theta$  и  $\varphi$ , задающих направление вектора в пространстве.

Выделим на сфере элемент площадью

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

вблизи направления, заданного сферическими углами  $\theta$  и  $\varphi$ . Вероятность того, что вектор  $\vec{e}$  будет лежать внутри телесного угла, опирающегося на этот элемент сферы, равна отношению площади элемента сферы  $dS$  к площади всей сферы

$$S = \int dS = r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi r^2$$

По определению распределения плотности вероятности

$$w(\theta, \varphi) = \frac{dS}{S d\theta d\varphi} = \frac{1}{4\pi} \sin\theta$$

Итак,

$$w(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sin\theta$$

Эта функция удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta w(\theta, \varphi) = 1$$

Распределение плотности вероятности для угла  $\varphi$

$$w_1(\varphi) = \int_0^{\pi} w(\theta, \varphi) d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

Распределение плотности вероятности для угла  $\theta$

$$w_2(\theta) = \int_0^{2\pi} w(\theta, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \sin\theta$$

Эти распределения также подчиняется условиям нормировки

$$\int_0^{2\pi} w_1(\varphi) d\varphi = 1$$

и

$$\int_0^{\pi} w_2(\theta) d\theta = 1$$

Заметим, что

$$w(\theta, \varphi) = w_1(\varphi) \cdot w_2(\theta)$$

Это означает, что углы  $\theta$  и  $\varphi$  статистически независимы.

Полученные распределения позволяют находить различные средние значения. В частности,

$$\langle \cos^2\theta \rangle = \int_0^{\pi} \cos^2\theta w_2(\theta) d\theta = \frac{1}{3}$$

#### 48. Распределение Гиббса

Термодинамическое равновесие. Основной закон статистической механики равновесных систем. Температура. Единица измерения температуры - градус Цельсия. Абсолютная температура. Распределение молекул по скоростям. Дисперсия тепловой скорости молекулы. Уравнение состояния идеального газа. Распределение частиц во внешнем силовом поле. Распределение частиц в поле силы тяжести. Средняя высота частицы над поверхностью Земли.

Термодинамическое равновесие. В этом параграфе мы познакомимся с основами статистической механики равновесных систем. Термодинамическим равновесием называется состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

Основной закон статистической механики равновесных систем. В состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для различных состояний системы описывается формулой

$$w(z) = C \cdot e^{-H(z)/kT}$$

Здесь  $z = q, p$  - набор обобщенных координат и импульсов системы,

$$H = K + \Pi$$

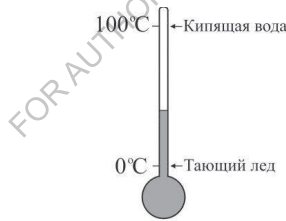
гамильтониан системы,  $T$  - абсолютная температура системы,

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/град}$$

постоянная Больцмана,  $C$  - нормировочная постоянная. Это распределение называется распределением Гиббса.

Температура. Из опыта известно, что одно и то же тело может быть горячим или холодным. Физический параметр, отличающий эти два состояния, называется температурой. Для того чтобы ввести температуру как количественную характеристику, нужно ввести единицу измерения. Такой единицей является градус Цельсия.

Единица измерения температуры – градус Цельсия. Градус Цельсия определяется как одна сотая часть интервала между температурой плавления льда и температурой кипения воды при нормальном давлении.



Термометр

Рис. 48.1.

Данное определение позволяет построить термометр, с помощью которого можно измерять температуру (рис. 48.1). Температуру в градусах Цельсия будем обозначать буквой  $t$ .

Абсолютная температура. Это температура, определяемая формулой

$$T = t + 273$$

где  $t$  - температура в градусах Цельсия. Абсолютная температура измеряется в градусах Кельвина. Градус Кельвина равен градусу Цельсия, но шкала Кельвина имеет другое начало отсчета – абсолютный ноль температуры, который равен минус 273 градуса Цельсия.



Рассмотрим теперь основные следствия распределения Гиббса - распределение молекул по скоростям и распределение молекул во внешнем силовом поле.

Распределение молекул по скоростям. Это распределение имеет вид

$$w(v_x, v_y, v_z) = C \cdot \exp \left[ -\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right]$$

Оно называется распределением Максвелла. Здесь  $v_x, v_y, v_z$  - декартовы компоненты скорости молекулы, которые могут принимать любые вещественные значения,  $m$  - масса молекулы. Для декартовой компоненты скорости молекулы можем записать

$$w(v_x) = C \cdot \exp \left( -\frac{mv_x^2}{2kT} \right)$$

Постоянная  $C$  в этой формуле определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(v_x) dv_x = 1$$

Этот интеграл вычисляется с помощью интеграла Пуассона (см. параграф 47).

Из распределения Максвелла следует, что декартовы компоненты скорости молекулы представляют собой независимые случайные величины с идентичными характеристиками. Каждая компонента имеет гауссово распределение плотности вероятности и нулевое среднее значение. Дисперсии компонент скорости также одинаковы. Найдем их величину.

Дисперсия тепловой скорости молекулы. Назовем дисперсией тепловой скорости средний квадрат проекции скорости молекулы на ось координат. Согласно правилу вычисления средних

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x$$

Вычислим этот интеграл методом интегрирования по частям. Для этого найдем дифференциал функции

$$w(v_x) = C \cdot \exp \left( -\frac{mv_x^2}{2kT} \right)$$

Получим

$$dw(v_x) = w \cdot \left( -\frac{m}{2kT} \right) \cdot 2v_x dv_x = -\frac{m}{kT} w v_x dv_x$$

Отсюда

$$wv_x dv_x = -\frac{kT}{m} dw(v_x)$$

Теперь

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = -\frac{kT}{m} \int_{-\infty}^{\infty} v_x dw(v_x) = \frac{kT}{m} \int_{-\infty}^{\infty} w(v_x) dv_x = \frac{kT}{m}$$

Здесь мы использовали условие нормировки, согласно которому

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(v_x) dv_x = 1$$

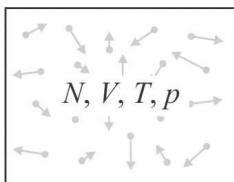
Итак, дисперсия тепловой скорости молекулы газа определяется формулой

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

Здесь  $m$  - масса молекулы,  $T$  - абсолютная температура газа,  $k$  - постоянная Больцмана.

Уравнение состояния идеального газа. Идеальным называется газ не взаимодействующих друг с другом молекул. Физически это условие реализуется для не слишком плотных и не слишком холодных газов. Например, воздух при нормальных условия с хорошей степенью точности можно рассматривать как идеальный газ.

Рассмотрим газ в сосуде объемом  $V$  при температуре  $T$ . Найдём давление газа  $p$ , если число молекул в сосуде равно  $N$  (рис. 48.2).

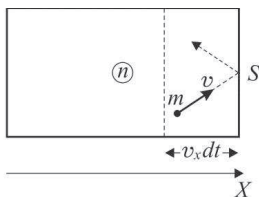


Термодинамические параметры  
газа в сосуде  
Рис. 48.2.

Введем концентрацию молекул газа как отношение числа молекул к объему сосуда

$$n = \frac{N}{V}$$

Эта величина измеряется в обратных кубических метрах. Направим ось  $x$  перпендикулярно стенке сосуда, площадь которой обозначим  $S$  (рис. 48.3). Рассмотрим молекулы, скорости которых в направлении оси  $x$  лежат в интервале от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ . При упругом ударе молекулы о стенку сосуда молекула передает стенке импульс, равный  $2mv_x$ .



К выводу уравнения состояния  
идеального газа

Рис. 48.3.

Найдем число таких молекул, который ударятся о стенку за время  $dt$ . За это время молекулы, движущиеся с указанной скоростью, проходят путь

$$v_x dt$$

в направлении оси  $x$ . Следовательно, все молекулы с такими скоростями, находящиеся в объеме

$$Sv_x dt$$

прилегающем к стенке, испытают столкновение со стенкой в течение времени  $dt$ . Всего в этом объеме находится

$$nSv_x dt$$

молекул. Вероятность того, что молекула имеет указанную выше скорость, равна

$$w(v_x)dv_x$$

Следовательно, число молекул с такими скоростями в указанном объеме будет равно

$$nSv_x dt \cdot w(v_x)dv_x$$

Суммарный импульс, который передадут эти молекулы стенке сосуда за время  $dt$ , будет равен

$$2mv_x \cdot nSv_x dt \cdot w(v_x)dv_x = 2mnS \cdot v_x^2 w(v_x)dv_x \cdot dt$$

По второму закону Ньютона сила давления этих молекул на стенку сосуда будет равна отношению импульса к промежутку времени  $dt$ , т.е.

$$2mnS \cdot v_x^2 w(v_x) dv_x$$

Эта сила направлена перпендикулярно к стенке. Давление равно отношению силы, действующей по нормали к поверхности, к площади этой поверхности. Следовательно, давление на стенку рассматриваемой группы молекул

$$dp = 2mn \cdot v_x^2 w(v_x) dv_x$$

Итак, мы нашли парциальное давление молекул с определенными скоростями. Теперь нужно просуммировать давления, создаваемые молекулами с разными скоростями. Для этого выполним интегрирование полученного выражения по скоростям  $v_x$  в области от нуля до бесконечности. Отрицательные скорости учитывать не нужно, так как молекулы с такими скоростями летят не в направлении стенки, а от нее и, следовательно, со стенкой не сталкиваются. Получим

$$p = \int dp = 2mn \int_0^{\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = mn \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = mn \langle v_x^2 \rangle = nkT$$

При вычислении мы учли четность функций  $w(v_x)$  и выражение для дисперсии тепловой скорости молекулы, полученное выше. Итак,

$$p = nkT$$

Это уравнение называется уравнением состояния идеального газа. Здесь  $p$  - давление газа,  $n = N/V$  - концентрация молекул,  $T$  - абсолютная температура,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град - постоянная Больцмана.

Распределение частиц во внешнем силовом поле. Это распределение описывается формулой

$$w(x, y, z) = C \cdot \exp \left[ -\frac{\Pi(x, y, z)}{kT} \right]$$

Оно называется распределением Больцмана. Здесь  $x, y, z$  - декартовы координаты частицы,  $\Pi(x, y, z)$  - ее потенциальная энергия,  $T$  - абсолютная температура,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град - постоянная Больцмана.

Распределение частиц в поле силы тяжести. Важный пример распределения Больцмана – распределение частиц в поле силы тяжести. В этом случае

$$\Pi = mgz$$

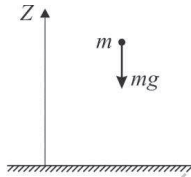
где  $m$  - масса частицы,  $g$  - ускорение свободного падения,  $z$  - высота частицы над поверхностью Земли (рис. 48.4). Распределение Больцмана приобретает вид

$$w(z) = C \cdot e^{-mgz/kT}$$

В качестве примера найдем среднюю высоту частицы над поверхностью Земли.

Средняя высота частицы над поверхностью Земли. Согласно правилу вычисления средних, средняя высота частицы над поверхностью Земли определяется выражением

$$\langle z \rangle = \int_0^{\infty} zw(z)dz$$



К вычислению средней высоты частицы в поле силы тяжести  
Рис. 48.4.

Вычислим этот интеграл методом интегрирования по частям. Обозначим

$$z_0 = \frac{kT}{mg}$$

Тогда

$$w(z) = C \cdot e^{-z/z_0}$$

Вычислим дифференциал этой функции. Имеем

$$dw(z) = w \cdot \left(-\frac{1}{z_0}\right) dz$$

Отсюда

$$w(z)dz = -z_0 dw(z)$$

Теперь

$$\langle z \rangle = \int_0^{\infty} zw(z)dz = -z_0 \int_0^{\infty} zdw(z) = z_0 \int_0^{\infty} w(z)dz = z_0 = \frac{kT}{mg}$$

Здесь мы использовали интеграл нормировки

$$\int_0^{\infty} w(z)dz = 1$$

Итак, средняя высота частицы над поверхностью Земли определяется формулой

$$\langle z \rangle = \frac{kT}{mg}$$

Здесь  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура,  $m$  - масса частицы,  $g$  - ускорение свободного падения. Согласно этой формуле тяжелые тела не отрываются от поверхности Земли. Легкие частицы могут подниматься высоко вверх (например, молекулы воздуха).

#### 49. Размер и масса молекул

Масса молекулы воздуха. Размер молекулы воздуха. Среднее расстояние между молекулами воздуха. Средняя скорость теплового движения молекул воздуха. Среднее время свободного пробега молекул воздуха.

Законы статистической механики позволяют определить размер и массу молекул, а также характеристики их теплового движения. В этом параграфе мы сделаем такие оценки на примере молекул воздуха.

Масса молекулы воздуха. Для определения массы молекулы воздуха используем уравнение состояния идеального газа, которое мы вывели в параграфе 48. Это уравнение имеет вид

$$p = nkT$$

где  $p$  - давление газа,  $n = N/V$  - концентрация молекул газа, равная отношению числа молекул газа  $N$  к объему  $V$  газа,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура газа.

Рассмотрим воздух при нормальных условиях, т.е. при давлении  $p_0 = 10^5$  Па и температуре  $T_0 = 273$  К. Используя уравнение состояния идеального газа, найдем концентрацию молекул

$$n_0 = \frac{p_0}{kT_0}$$

Подставив в эту формулу указанные выше числа, получим

$$n_0 = 2.7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

Это число определяет концентрацию молекул любого газа при нормальных условиях. Оно называется числом Лошмидта. Величина, обратная числу Лошмидта

$$V_1 = \frac{1}{n_0}$$

имеет смысл объема, который в среднем приходится на одну молекулу газа при нормальных условиях. Этот объем равен

$$V_1 = 0.37 \cdot 10^{-25} \text{ м}^3$$

Итак, в каждом кубическом метре воздуха при нормальных условиях содержится  $2.7 \cdot 10^{25}$  молекул. Теперь, зная массу одного кубического метра воздуха, т.е. его плотность, мы сможем найти массу одной молекулы воздуха.

Плотность воздуха равна отношению массы воздуха  $m$  к объему  $V$ , который он занимает:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

При нормальных условиях плотность воздуха

$$\rho = \rho_0 = 1.3 \text{ кг/м}^3$$

Свяжем эту величину с массой молекулы воздуха, которую обозначим  $m_0$ . Для этого представим массу воздуха как произведение массы молекулы на число молекул:

$$m = Nm_0$$

Отсюда

$$\rho_0 = \frac{Nm_0}{V} = n_0 m_0$$

и, следовательно,

$$m_0 = \frac{\rho_0}{n_0}$$

Подставив указанные выше числа, находим

$$m_0 = \frac{1.3}{2.7 \cdot 10^{25}} \text{ кг} = 0.5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

Итак, масса молекулы воздуха составляет примерно  $0.5 \cdot 10^{-25}$  кг.

Размер молекулы воздуха. Допустим, что сжимая воздух, мы перевели его в жидкое состояние. Из опыта известно, что жидкости практически не сжимаемы. Это можно объяснить тем, что в жидкости между молекулами нет свободного пространства, т.е. они расположены вплотную друг к другу. Отсюда следует, что плотность вещества в жидком состоянии  $\rho_{\text{ж}}$  примерно равна плотности вещества в отдельной молекуле, т.е. величина  $\rho_{\text{ж}}$  примерно равна отношению массы молекулы  $m_0$  к ее объему  $V_0$ . Таким образом,

$$\rho_{\text{ж}} \approx \frac{m_0}{V_0}$$

Если считать молекулу шаром диаметра  $d_0$ , то при плотной упаковке на одну молекулу приходится объем

$$V_0 = d_0^3$$

Отсюда

$$\rho_{\text{ж}} \approx \frac{m_0}{d_0^3}$$

и, следовательно,

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{m_0}{\rho_{\text{ж}}}}$$

Эта формула позволяет оценить размер молекулы воздуха. Здесь  $d_0$  - диаметр молекулы,  $m_0$  - масса молекулы,  $\rho_{\text{ж}}$  - плотность воздуха в жидком состоянии. Полагая

$$\rho_{\text{ж}} = 0.9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

получим

$$d_0 = 3.8 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Итак, диаметр молекулы воздуха составляет примерно  $3.8 \cdot 10^{-10}$  м.

Основные параметры молекул воздуха – их размер и масса – определены. Кроме этого, представляют интерес и некоторые другие параметры, в частности, среднее расстояние между молекулами, скорость движения молекул, среднее время свободного пробега молекул.



Среднее расстояние между молекулами воздуха. Это расстояние можно оценить по формуле

$$l = \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}}$$

где

$$n_0 = 2.7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

- число Лошмидта. Отсюда

$$l = 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

Таким образом, среднее расстояние между молекулами воздуха при нормальных условиях примерно на порядок превосходит собственный размер молекулы.

Средняя скорость теплового движения молекул воздуха. Оценим эту скорость по формуле

$$v_T = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$$

где  $\langle v_x^2 \rangle$  - дисперсия тепловой скорости молекулы. Как показано в параграфе 48,

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

где  $m$  - масса молекулы,  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура газа. Отсюда

$$v_T = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Используя приведенные выше данные, для нормальных условий получим

$$v_T \approx 300 \text{ м/с}$$

Заметим, что эта скорость близка к скорости звука в воздухе.

Среднее время свободного пробега молекул воздуха. Будем считать молекулы воздуха шариками диаметра  $d_0$ . Представим себе, что одна из молекул газа движется со скоростью  $v_{\text{отн}}$ , равной среднему значению модуля относительной скорости двух молекул газа, а

остальные молекулы газа покоятся. За некоторый промежуток времени  $t$  движущаяся молекула пройдет путь, равный

$$L = v_{\text{отн}} \cdot t$$

и испытает столкновения со всеми молекулами, центры которых попадут в объем трубки длиной  $L$  и радиусом  $d_0$ . Объем этой трубки

$$\pi d_0^2 L$$

На каждую молекулу воздуха приходится в среднем объем

$$V_1 = \frac{1}{n_0}$$

где  $n_0$  - число Лошмидта. Поэтому число столкновений, которые испытает движущаяся молекула с другими молекулами газа

$$N_c = \frac{\pi d_0^2 L}{V_1}$$

или

$$N_c = \pi d_0^2 n_0 v_{\text{отн}} t$$

Среднее время свободного пробега определим как

$$\tau_c = \frac{t}{N_c}$$

Тогда получим

$$\tau_c = \frac{1}{\pi d_0^2 n_0 v_{\text{отн}}}$$

Используя распределение Максвелла, можно показать, что

$$v_{\text{отн}} = 4 \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Следовательно,

$$\tau_c = \frac{\sqrt{m/kT}}{4\sqrt{\pi}d_0^2 n_0} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}d_0^2 n_0 v_T}$$

где

$$v_T = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

средняя тепловая скорость молекулы газа. Подставим сюда параметры молекул воздуха при нормальных условиях, найденные выше. А именно,

$$d_0 = 3.8 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$n_0 = 2.7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

$$v_T = 300 \text{ м/с}$$

получим

$$\tau_c = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ с}$$

Таким образом, молекула воздуха при нормальных условиях испытывает примерно десять миллиардов столкновений в секунду.

## 50. Измерение постоянной Больцмана

Измерение постоянной Больцмана. Броуновское движение. Опыт Перрена. Факты, подтверждающие распределение Гиббса: свойства газов, распределение воздуха в атмосфере Земли.

Измерение постоянной Больцмана. Итак, мы получили основные характеристики молекул воздуха и их теплового движения (см. параграф 49). Нетрудно видеть, что важную роль в этих оценках сыграла постоянная Больцмана

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/град}$$

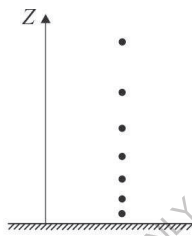
Остановимся на проблеме измерения этой величины. Одно из первых измерений этой физической постоянной было сделано французским физиком Перреном. В своих опытах он использовал явление броуновского движения.

Броуновское движение. Броуновским движением называется движение частиц цветочной пыльцы в воде, которое можно наблюдать с помощью микроскопа. Это явление было открыто английским ботаником Броуном в 1827 году. Броуновское движение объясняется тем, что мелкие частицы чувствительным к ударам молекул, окружающей их среды. Частицы цветочной пыльцы, которые изучал Броун, оказались достаточно мелкими для того, чтобы реагировать на удары молекул воды, и вместе с тем достаточно крупными для того, чтобы их можно было увидеть с помощью микроскопа.

Опыт Перрена. В этом опыте, проведенном в 1908 году, Перрен наблюдал с помощью микроскопа движение мельчайших шариков из смолы в воде. Перрену удалось измерить массу и размер этих шариков, а также среднюю высоту, на которую поднимаются эти частицы над подложкой вследствие теплового движения. Согласно формуле, полученной в параграфе 48, эта высота определяется формулой

$$\langle z \rangle = \frac{kT}{mg}$$

Говоря упрощенно, Перрену удалось измерить величины  $m$  и  $\langle z \rangle$ , входящие в эту формулу (рис. 50.1). После этого он нашел величину постоянной Больцмана  $k$ .



Распределение броуновских частиц по высоте

Рис. 50.1.

Сделаем эту оценку. Пусть  $d$  – диаметр броуновской частицы,  $\rho$  – ее плотность,  $\rho_0$  – плотность воды. Тогда

$$V = \pi d^3 / 6$$

- объем частицы, а ее масса

$$m = \rho V$$

Учитывая силу Архимеда

$$F_A = \rho_0 V g$$

действующую на частицу в воде, представим среднюю высоту подъема частиц в виде

$$\langle z \rangle = \frac{6kT}{(\rho - \rho_0)\pi d^3 g}$$

Отсюда получаем следующее выражение для постоянной Больцмана

$$k = \langle z \rangle \frac{(\rho - \rho_0)\pi d^3 g}{6T}$$

Для оценки используем следующие значения параметров:

$$\rho = 1.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$d = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\langle z \rangle = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$g = 9.8 \text{ м/с}^2$$

Получим

$$k \approx 1.3 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/град}$$

Таким образом, значение постоянной Больцмана определено экспериментально в опыте с броуновскими частицами.

Факты, подтверждающие распределение Гиббса: свойства газов, распределение воздуха в атмосфере Земли. Уравнению состояния идеального газа

$$p = nkT$$

выведенному в параграфе 48, можно придать иной вид. Положим

$$n = N/V$$

$$N = \nu N_A$$

$$\nu = m/\mu$$

$$R = kN_A$$

Здесь  $N$  – число молекул газа,  $V$  – объем газа,  $\nu$  – число молей газа,  $N_A$  – число Авогадро (число молекул в одном моле любого газа),  $m$  – масса,  $\mu$  – молярная масса газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная. Тогда

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

Это уравнение называется уравнением Менделеева - Клапейрона или объединенным законом газового состояния. Этот закон объединяет в себе закон изотермического процесса (закон Бойля - Мариотта), закон изобарного процесса (закон Гей-Люссака) и закон изохорного процесса (закон Шарля). Эти законы хорошо описывают свойства реальных газов в широком диапазоне изменения их параметров.

Как показано в параграфе 48, распределение молекул воздуха по высоте в поле тяготения Земли описывается формулой

$$w(z) = C \cdot \exp\left(-\frac{m_0gz}{kT}\right)$$

Здесь  $C$  – нормировочная постоянная,  $m_0$  – масса молекулы,  $g$  – ускорение свободного падения,  $z$  – высота молекулы над поверхностью Земли,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура воздуха. Вероятность найти молекулу в данной точке пространства пропорциональна концентрации молекул вблизи данной точки. Поэтому распределение концентрации молекул воздуха по высоте описывается формулой

$$n(z) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_0gz}{kT}\right)$$

или

$$n(z) = n_0 \exp(-z/z_0)$$

Здесь

$$z_0 = \frac{kT}{m_0g}$$

и  $n_0$  есть концентрация молекул воздуха у поверхности Земли.

Величина  $z_0$  имеет смысл средней высоты молекулы воздуха над поверхностью Земли (см. параграф 48). Полагая

$$T = 273K$$

$$m_0 = 0.5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

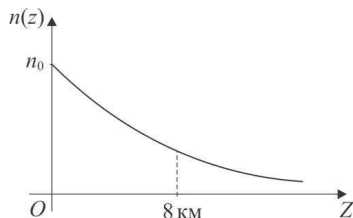
$$g = 9.8 \text{ м/с}^2$$

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/град}$$

получим

$$z_0 \approx 8 \text{ км}$$

Эта величина определяет толщину земной атмосферы (рис. 50.2). Итак, согласно распределению Больцмана, концентрация молекул воздуха уменьшается с высотой по экспоненциальному закону, а толщина земной атмосферы составляет около 8 км. Эти данные подтверждаются опытом.



Распределение воздуха в атмосфере Земли  
Рис. 50.2.

В заключение этого параграфа отметим, что распределение Максвелла и распределение Больцмана, а также их следствия хорошо подтверждаются опытом. Это можно рассматривать как экспериментальное подтверждение основного закона статистической механики равновесных систем и распределения Гиббса.

## 51. Распределение энергии по степеням свободы

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Температура как мера средней кинетической энергии молекул. Внутренняя энергия идеального газа. Теплоемкость идеального газа и строение молекул газа.

Мы продолжаем изучать системы, состоящие из большого числа частиц. В этом параграфе рассмотрим один из основных законов статистической механики – закон равнораспределения энергии по степеням свободы.

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Этот закон формулируется следующим образом. В состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная

$$E = \frac{kT}{2}$$

Здесь  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура системы.

Квадратичная степень свободы – это переменная, вклад которой в гамильтониан пропорционален квадрату этой переменной. Обозначим эту переменную  $z_1$ . Тогда гамильтониан системы можно представить в виде

$$H(z) = az_1^2 + h(z')$$

Здесь  $z'$  обозначает совокупность всех остальных аргументов гамильтониана,  $z = z_1, z'$  и допускается, что

$$a = a(z')$$

Квадратичной переменной является, например, обобщенный импульс. Напомним в связи с этим, что гамильтониан частицы в потенциальном силовом поле имеет вид (см. параграф 39)

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

Здесь квадратичными переменными являются величины  $p_x, p_y, p_z$ . Далее для определенности будем считать, что квадратичная переменная  $z_1$  представляет собой один из обобщенных импульсов системы.

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы представляет собой одну из теорем статистической механики. Докажем эту теорему.

Согласно правилу вычисления средних (см. параграф 47)

$$\langle az_1^2 \rangle = \int az_1^2 w(z) dz$$

где  $w(z)$  - распределение Гиббса, определяемое формулой

$$w(z) = C \cdot \exp \left[ -\frac{H(z)}{kT} \right]$$

Подставив сюда

$$H(z) = az_1^2 + h(z')$$

получим

$$\langle az_1^2 \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} az_1^2 \cdot \exp \left( -\frac{az_1^2}{kT} \right) \cdot \exp \left[ -\frac{h(z')}{kT} \right] dz$$

или

$$\langle az_1^2 \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} dz' \exp \left[ -\frac{h(z')}{kT} \right] \int_{-\infty}^{\infty} az_1^2 \exp \left( -\frac{az_1^2}{kT} \right) dz_1$$

Вычислим внутренний интеграл по частям. Для этого возьмем дифференциал от экспоненты:



$$d \exp\left(-\frac{az_1^2}{kT}\right) = -2 \frac{az_1}{kT} \exp\left(-\frac{az_1^2}{kT}\right)$$

Отсюда

$$az_1 \exp\left(-\frac{az_1^2}{kT}\right) = -\frac{kT}{2} \cdot d \exp\left(-\frac{az_1^2}{kT}\right)$$

Теперь внутренний интеграл можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} az_1^2 \exp\left(-\frac{az_1^2}{kT}\right) dz_1 = -\frac{kT}{2} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 d \exp\left(-\frac{az_1^2}{kT}\right) = \frac{kT}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{az_1^2}{kT}\right) dz_1$$

Далее

$$\langle az_1^2 \rangle = \frac{kT}{2} \cdot C \int_{-\infty}^{\infty} dz' \exp\left[-\frac{h(z')}{kT}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{az_1^2}{kT}\right) dz_1$$

или

$$\langle az_1^2 \rangle = \frac{kT}{2} \int w(z) dz = \frac{kT}{2}$$

Здесь мы использовали условие нормировки распределения Гиббса:

$$\int w(z) dz = 1$$

Итак,

$$\langle az_1^2 \rangle = \frac{kT}{2}$$

Тем самым, теорема доказана.

Температура как мера средней кинетической энергии частиц системы. Одним из следствий закона равнораспределения энергии по степеням свободы является вывод о том, что абсолютная температура является мерой средней кинетической энергии частиц системы.

Внутренняя энергия идеального газа. С помощью закона равнораспределения энергии можно определить важные термодинамические параметры. Один из них – внутренняя энергия идеального газа.

Внутренней энергией системы называется энергия движения и взаимодействия частиц, составляющих систему. В статистической механике внутренняя энергия определяется как среднее значение гамильтониана:

$$u = \langle H \rangle$$

Гамильтониан консервативной системы равен сумме кинетической и потенциальной энергий системы. Для идеального газа потенциальная энергия взаимодействия частиц равна нулю, поэтому внутренняя энергия газа равна средней кинетической энергии молекул

$$u = \langle K \rangle$$

Кинетическая энергия системы частиц равна сумме кинетических энергий отдельных частиц системы. Поэтому

$$u = N \langle K_0 \rangle$$

где  $N$  - число молекул газа,  $K_0$  – средняя кинетическая энергия одной молекулы. Будем считать молекулу твердым телом, а все обобщенные импульсы квадратичными степенями свободы. Тогда, применяя закон равнораспределения энергии по степеням свободы, можем записать

$$K_0 = s \frac{kT}{2}$$

где  $s$  – число степеней свободы молекулы. Таким образом, внутренняя энергия идеального газа определяется формулой

$$u = Ns \frac{kT}{2}$$

Здесь  $N$  - число молекул газа,  $s$  – число степеней свободы молекулы,  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура газа.

Теплоемкость идеального газа и строение молекул газа. Теплоемкостью тела называется отношение полученного телом тепла к приращению его температуры:

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

Теплота определяется как энергия, переданная телу без совершения работы.

Рассмотрим нагревание газа при постоянном объеме. При таком процессе газ не совершает работу. В этом случае, согласно первому закону термодинамики, вся теплота, переданная газу, идет на увеличение его внутренней энергии:

$$dQ = du$$

Согласно формуле

$$u = Ns \frac{kT}{2}$$

приращение внутренней энергии газа определяется приращением его температуры:

$$du = Ns \frac{k}{2} dT$$

Отсюда

$$C_V = \frac{1}{2} Nks$$

Здесь  $C_V$  – теплоемкость идеального газа при постоянном объеме,  $N$  – число молекул газа,  $k$  – постоянная Больцмана,  $s$  – число степеней свободы молекулы. Положим

$$N = \nu N_A$$

где  $\nu$  – число молей газа,  $N_A$  – число Авогадро. Тогда

$$C_V = \frac{1}{2} \nu R s$$

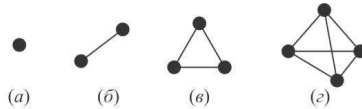
Здесь

$$R = kN_A = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$$

- универсальная газовая постоянная. Теплоемкость газа при постоянном объеме можно измерить экспериментально. Это открывает возможность определения числа степеней свободы молекулы по формуле

$$s = \frac{2C_V}{\nu R}$$

Приведем несколько примеров. Оценки по этой формуле показывают, что молекулы инертных газов, например, гелия или неона, имеют три степени свободы. Следовательно, молекулы инертных газов одноатомны. Молекулы водорода, кислорода и азота имеют пять степеней свободы. Это означает, что молекулы этих газов двухатомны. Наконец, молекулы воды, метана, аммиака имеют шесть степеней свободы. Это означает, что в состав каждой из этих молекул входит не менее трех атомов (рис. 51.1). Таким образом, измерение теплоемкости газа позволяет сделать выводы о строении его молекул.



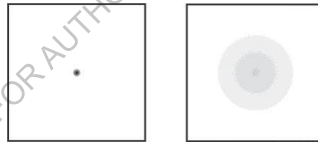
Строение молекул газа: одноатомная (а),  
 двухатомная (б), трехатомная (в) и многоатомная (г)  
 молекулы  
 Рис. 51.1.

## 52. Диффузия и теплопроводность

Диффузия. Закон диффузии. Коэффициент диффузии. Уравнение диффузии. Теплопроводность. Закон теплопроводности. Коэффициент теплопроводности. Уравнение теплопроводности.

В этом параграфе мы рассмотрим явления диффузии и теплопроводности, которые объединяют общим понятием «явления переноса». Одно из них связано с переносом вещества, другое с переносом энергии в результате хаотического теплового движения частиц вещества. Такие процессы происходят в неравновесных системах, в частности, в живых организмах. Направления потоков частиц и энергии таковы, что система стремится приблизиться к состоянию равновесия.

Диффузия – это процесс проникновения одного вещества в другое. Например, поместив кристаллик марганцовки в чашку с водой, мы будем наблюдать постепенное окрашивание воды (рис. 52.1).

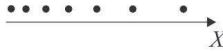


Явление диффузии  
 Рис. 52.1.

Этот процесс обусловлен тем, что кристалл растворяется, а затем его молекулы перемещаются в воде, совершая хаотическое тепловое движение. Подобные процессы наблюдаются во всех случаях, когда одно вещество добавлено в другое, причем изначально примесь распространена по объему среды неравномерно.

Закон диффузии. Экспериментальные исследования процессов диффузии позволили установить закон, формулируемый следующим образом: плотность потока частиц пропорциональна градиенту их концентрации.

Представим этот закон в математической форме. Рассмотрим случай, когда концентрация частиц примеси  $n = N/V$  зависит только одной пространственной координаты - координаты  $x$  (рис. 52.2).

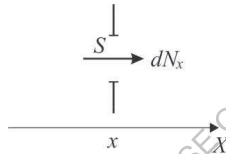


Пример неоднородного распределения частиц в пространстве  
Рис. 52.2.

Тогда закон диффузии можно выразить формулой

$$j_x = \frac{dN_x}{Sdt} = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

Здесь  $j_x$  - плотность потока частиц,  $dN_x$  - число частиц, пересекающих площадку площадью  $S$ , перпендикулярную оси  $x$ , за время  $dt$  в направлении оси  $x$ ,  $D$  - постоянная величина, называемая коэффициентом диффузии (рис. 52.3). Знак «минус» в этой формуле указывает направление потока частиц. Поток направлен из области более высокой концентрации частиц в область их более низкой концентрации.

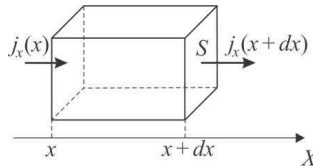


К понятию плотности потока частиц  
Рис. 52.3.

Коэффициент диффузии это коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и градиентом их концентрации. Размерность этого коэффициента  $\text{м}^2/\text{с}$ . Его физический смысл – темп расплывания диффузионного пятна. Коэффициент диффузии можно измерить экспериментально, например, в опыте с кристалликом марганцовки и водой.

Уравнение диффузии. Рассмотрим маленький элемент объема среды. Допустим, что этот элемент ограничен плоскостями с координатами  $x$  и  $x + dx$ , а площадь его поперечного сечения равна  $S$  (рис. 52.4). Тогда объем данного элемента среды

$$dV = Sdx$$



К выводу уравнения диффузии  
Рис. 52.4

Приращение числа частиц в этом объеме за время  $dt$  определяется формулой

$$dN = j_x(x)Sdt - j_x(x + dx)Sdt$$

или

$$dN = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx \cdot Sdt$$

С другой стороны,

$$dN = dn \cdot Sdx$$

где  $dn$  - приращение концентрации частиц. Отсюда

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

Это уравнение выражает сохранение числа частиц. Оно называется уравнением непрерывности. Подставив сюда

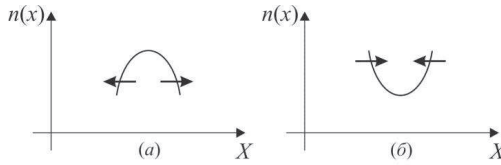
$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Это уравнение называется уравнением диффузии. Здесь  $n$  – концентрация частиц примеси,  $t$  – время,  $x$  – координата,  $D$  – коэффициент диффузии.

Физический смысл уравнения диффузии состоит в том, что оно описывает изменение распределения вещества в пространстве вследствие хаотического теплового движения частиц. Например, если в окрестности некоторой точки пространства вещество (примесь) распределено однородно, то  $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$ , и концентрация вещества в этой области остается постоянной. Если концентрация примеси линейно меняется с координатой, то снова  $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$ , и концентрация остается постоянной («эффект ветра»). Если же концентрация примеси меняется с координатой по квадратичному закону, т.е. в данной точке пространства имеется максимум или минимум концентрации примеси, то концентрация будет убывать или нарастать с течением времени (рис. 52.5).



Примеры распределений частиц в пространстве и направления потоков частиц: максимум концентрации (а) и минимум концентрации (б)

Рис. 52.5.

Уравнение диффузии в форме

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

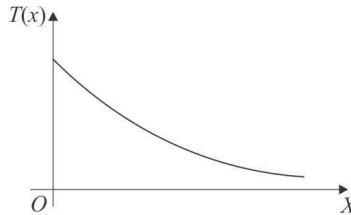
применимо в простейшем случае, когда концентрация частиц зависит только от одной пространственной координаты. В общем случае уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \left( \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right)$$

Теплопроводность это процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле. Например, соединив два металлических кубика – холодный и горячий – мы будем наблюдать процесс выравнивания температур. Этот процесс обусловлен тем, что молекулы контактирующих тел при столкновениях обмениваются энергией.

Закон теплопроводности. Экспериментальные исследования процессов теплопроводности позволили установить закон, формулируемый следующим образом: плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры.

Представим этот закон в математической форме. Рассмотрим случай, когда температура зависит только одной пространственной координаты – координаты  $x$  (рис. 52.6).



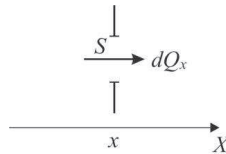
Пример распределения температуры в неоднородно нагретом теле

Рис. 52.6.

Тогда закон теплопроводности можно выразить формулой

$$j_x = \frac{dQ_x}{Sdt} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

Здесь  $j_x$  - плотность потока тепла,  $dQ_x$  - энергия (количество тепла или теплота), прошедшая через площадку площадью  $S$ , перпендикулярную оси  $x$ , за время  $dt$  в направлении оси  $x$ ,  $T$  - температура,  $\kappa$  - постоянная величина, называемая коэффициентом теплопроводности (рис. 52.7). Знак «минус» в этой формуле указывает направление потока тепла. Поток направлен из области более высокой температуры в область более низкой температуры.



К понятию плотности потока  
теплоты  
Рис. 52.7.

Коэффициент теплопроводности это коэффициент пропорциональности между плотностью потока тепла и градиентом температуры. Размерность этого коэффициента  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}}$ . Его физический смысл – темп расплывания «теплового» пятна. Коэффициенты теплопроводности для различных материалов измерены и приведены в справочниках и в таблицах.

Уравнение теплопроводности. Рассмотрим маленький элемент объема среды. Допустим, что этот элемент ограничен плоскостями с координатами  $x$  и  $x + dx$ , а площадь его поперечного сечения равна  $S$ . Тогда объем данного элемента среды  $dV = Sdx$ . Приращение тепловой энергии в этом объеме за время  $dt$  определяется формулой

$$dQ = j_x(x)Sdt - j_x(x + dx)Sdt$$

или

$$dQ = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx \cdot Sdt$$

С другой стороны,

$$dQ = dm \cdot c \cdot dT$$

или

$$dQ = \rho Sdx \cdot c \cdot dT$$



где  $dT$  - приращение температуры,  $dm$  - масса вещества в данном элементе объема,  $c$  - удельная теплоемкость материала,  $\rho$  - его плотность. Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho} \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

Это уравнение выражает сохранение энергии. Подставив сюда

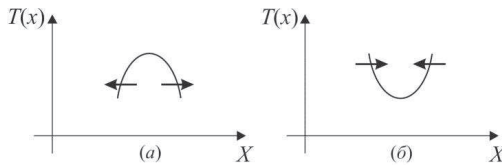
$$j_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Это уравнение называется уравнением теплопроводности. Здесь  $T$  - температура,  $t$  - время,  $x$  - координата,  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности,  $c$  - удельная теплоемкость среды,  $\rho$  - ее плотность.

Физический смысл уравнения теплопроводности состоит в том, что оно описывает изменение распределения температуры в пространстве вследствие хаотического теплового движения частиц. Например, если в окрестности некоторой точки пространства температура не зависит от координаты или зависит от координаты линейно, то она не будет меняться с течением времени. Если же температура меняется с координатой по квадратичному закону, т.е. в данной точке пространства имеется максимум или минимум температуры, то температура в этом месте будет убывать или нарастать с течением времени (рис. 52.8).



Примеры распределений температуры в пространстве и направления потоков теплоты: максимум температуры (а) и минимум температуры (б)

Рис. 52.8.

Уравнение теплопроводности в форме

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

применимо в простейшем случае, когда температура среды зависит только от одной пространственной координаты. В общем случае уравнение теплопроводности имеет вид

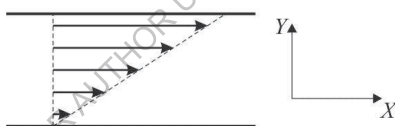
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

### 53. Вязкость жидкости

Вязкость. Закон вязкости. Коэффициент вязкости. Сила вязкого трения. Уравнение движения вязкой жидкости.

Вязкость это свойство жидкости препятствовать движению соприкасающихся с ней тел. Вязкость, также как диффузия и теплопроводность, связана с хаотическим тепловым движением частиц вещества. Сила вязкого трения объясняется переносом импульса молекулами вещества.

Закон вязкости. Экспериментальные исследования вязкости позволили установить закон, формулируемый следующим образом: плотность потока импульса пропорциональна градиенту скорости. Представим этот закон в математической форме. Рассмотрим случай, когда частицы среды движутся вдоль оси  $x$ , а их скорость зависит от поперечной координаты  $y$  (рис. 53.1).



Пример распределения скоростей частиц в сдвиговом потоке  
Рис. 53.1.

В таком потоке отдельные слои жидкости сдвигаются один относительно другого, поэтому его называют сдвиговым потоком. В сдвиговом потоке

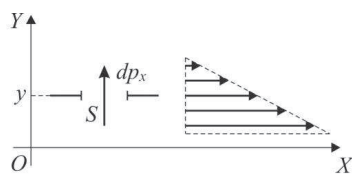
$$v_x = v_x(y)$$

и существует поперечный градиент скорости  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ . Закон вязкости можно выразить формулой

$$\frac{dp_x}{Sdt} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Здесь  $dp_x$  - добавочный импульс в направлении оси  $x$ , перенесенный частицами вещества через площадку площадью  $S$  с координатой  $y$  в направлении оси  $y$  за время  $dt$ ,  $\eta$  - постоянная величина, называемая коэффициентом вязкости. Знак «минус» в этой формуле

указывает направление потока импульса: он направлен из области с более высокой скоростью частиц в область с более низкой скоростью. Такое направление переноса импульса приводит к выравниванию скоростей частиц в потоке (рис. 53.2). Тем самым система стремится приблизиться к состоянию равновесия.



К понятию плотности потока импульса. В правой части рисунка показано распределение скоростей частиц  
Рис. 53.2.

Коэффициент вязкости это коэффициент пропорциональности между плотностью потока импульса и градиентом скорости. Размерность этого коэффициента есть  $\text{Па} \cdot \text{с}$ . Например, коэффициент вязкости воды при комнатной температуре  $\eta = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

Сила вязкого трения. По второму закону Ньютона поток импульса равен силе, т.е.

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x$$

Здесь  $F_x$  - сила, направленная вдоль оси  $x$ . Используя понятие силы, закон вязкого трения можно записать так:

$$\frac{F_x}{S} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Отсюда

$$F_x(y) = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Эта сила приложена к элементу жидкости, расположенному выше плоскости с координатой  $y$ .

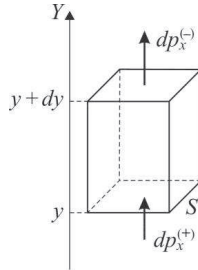
Уравнение движения вязкой жидкости. Рассмотрим небольшой элемент жидкости, расположенный между плоскостями  $y$  и  $y + dy$ . Обозначим площадь основания этого элемента через  $S$  (рис. 53.3). Тогда объем данного элемента среды

$$dV = S dy$$

а его масса

$$dm = \rho S dy$$

где  $\rho$  - плотность жидкости.



К выводу уравнения движения  
элемента вязкой жидкости  
Рис. 53.3.

Запишем импульс, входящий в выделенный элемент среды

$$dp_x^{(+)} = -\eta S \cdot dt \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}(y)$$

Выходящий из него импульс:

$$dp_x^{(-)} = -\eta S \cdot dt \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy)$$

Приращение импульса в данном элементе объема

$$dp_x = dp_x^{(+)} - dp_x^{(-)}$$

или

$$dp_x = \eta S \cdot dt \cdot \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \right]$$

или, приближенно,

$$dp_x = \eta S \cdot dt \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \cdot dy$$

или

$$dp_x = \eta \cdot dt \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \cdot dV$$

Отсюда

$$\frac{dp_x}{dt} = \eta \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \cdot dV$$

Далее, по определению импульса

$$\frac{dp_x}{dt} = dm \cdot \frac{dv_x}{dt}$$

Отсюда

$$\frac{dp_x}{dt} = \rho dV \cdot \frac{dv_x}{dt}$$

С другой стороны, как показано выше,

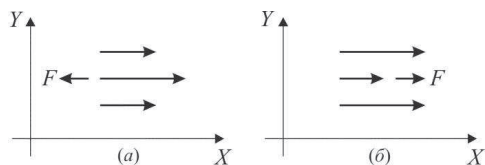
$$\frac{dp_x}{dt} = \eta \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \cdot dV$$

Следовательно,

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Это уравнение описывает движение вязкой жидкости. Здесь  $v_x$  – скорость элемента жидкости в направлении оси  $x$ ;  $y$  – координата данного элемента жидкости в проекции на ось, вдоль которой меняется скорость движения жидкости,  $t$  – время,  $\eta$  – коэффициент вязкости жидкости,  $\rho$  – ее плотность.

Уравнение движения вязкой жидкости описывает изменение распределения скоростей частиц в пространстве вследствие хаотического теплового движения. Например, если в окрестности некоторой точки пространства скорость потока не зависит от координаты или зависит от координаты линейно, то она не будет меняться с течением времени. Если же скорость меняется с координатой по квадратичному закону, т.е. в данной точке пространства имеется максимум или минимум скорости, то скорость в этом месте будет убывать или нарастать с течением времени (рис. 53.4).



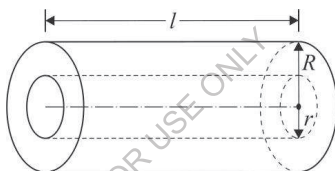
Примеры распределений скоростей в потоке и направления сил вязкого трения: максимум скорости (а) и минимум скорости (б)

Рис. 53.4.

## 54. Течение вязкой жидкости

Течение вязкой жидкости по трубе. Формула Пуазейля.

Течение вязкой жидкости по трубе. Рассмотрим течение вязкой жидкости по трубе радиуса  $R$ . Выделим элемент жидкости радиуса  $r$  и длины  $l$ , расположенный на оси симметрии трубы (рис. 54.1).



Течение вязкой жидкости по трубе круглого сечения

Рис. 54.1.

Пусть на концах этого элемента существует разность давлений, равная  $\Delta p$  [Па]. Допустим, что жидкость течет равномерно. Тогда центр масс выделенного элемента жидкости движется без ускорения и, следовательно, сумма сил, приложенных к этому элементу жидкости, равна нулю. Кроме разности давлений на данный элемент действует сила вязкого трения, приложенная со стороны окружающей жидкости. В проекции на направление движения жидкости эта сила равна

$$F_x = \eta S \frac{dv}{dr}$$

Знак «плюс» здесь соответствует силе, которая действует на жидкость, заключенную внутри выделенного объема. Итак,

$$\Delta p \cdot \pi r^2 + \eta S \frac{dv}{dr} = 0$$

Здесь

$$S = 2\pi r l$$

площадь боковой поверхности выделенного элемента жидкости. Следовательно,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2l\eta} r$$

и

$$dv = -\frac{\Delta p}{2l\eta} r dr$$

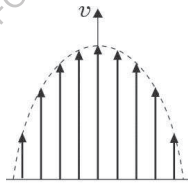
Интегрируя это уравнение, находим

$$\int_{v_0}^v dv = -\frac{\Delta p}{2l\eta} \int_0^r r dr$$

и

$$v = v_0 - \frac{\Delta p}{4l\eta} r^2$$

Таким образом, скорость частиц жидкости в трубе уменьшается по мере удаления от оси трубы по параболическому закону. Это так называемый пуазейлевский профиль скорости (рис. 54.2).



Пуазейлевский  
профиль скорости

Рис. 54.2.

Теперь найдем скорость течения жидкости на оси трубы. Для этого предположим, что скорость жидкости около стенки трубы равна нулю. Тогда

$$v(R) = 0$$

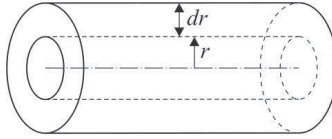
и

$$v_0 = \frac{\Delta p}{4l\eta} R^2$$

При этом

$$v(r) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Формула Пуазейля. Вычислим объем жидкости, протекающий по трубе за время  $t$ . Сначала вычислим элементарный объем жидкости, протекающей по тонкой кольцевой трубке радиуса  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 54.3).



К выводу формулы Пуазейля  
Рис. 54.3.

Текущая здесь жидкость имеет скорость  $v(r)$ . Площадь поперечного сечения этой трубки приблизительно равна  $2\pi r \cdot dr$ . Следовательно, за время  $t$  по этой трубке протечет жидкость объемом

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot v(r) \cdot t$$

Полный объем жидкости, протекающей по всей трубе радиуса  $R$  равен сумме элементарных объемов жидкости, протекающих по элементарным тонким кольцевым трубкам. Этот объем можно представить в виде интеграла

$$V = \int dV$$

С учетом формулы для элементарного объема этот интеграл сводится к интегралу по поперечному сечению трубы

$$V = 2\pi t \int_0^R v(r) r dr$$

Подставляя сюда

$$v(r) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



и интегрируя, получим

$$V = \frac{\pi}{2} R^2 t v_0$$

или

$$V = \frac{\pi \Delta p \cdot R^4}{8 l \eta} t$$

Итак,

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi \Delta p}{8 l \eta} R^4$$

Эта формула называется формулой Пуазейля. Здесь  $V$  – объем жидкости, проходящей за время  $t$  по трубе радиуса  $R$  и длины  $l$ , при условии, что на концах этой трубы создана разность давлений  $\Delta p$ , и жидкость течет по трубе равномерно. Величина  $\eta$  в этой формуле обозначает коэффициент вязкости жидкости.

## 55. Принцип относительности.

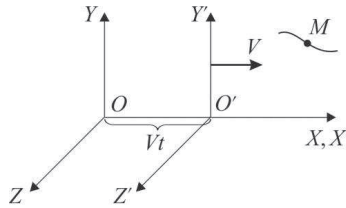
### Преобразования Галилея и преобразования Лоренца

Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Проблема с теорией электромагнитного поля. Гипотеза неподвижного эфира. Продольная и поперечная скорости света. Опыт Майкельсона. Принцип постоянства скорости света. Относительность времени. Преобразования Лоренца. Принцип относительности Эйнштейна.

Принцип относительности Галилея: никакими механическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется.

Математически этот принцип формулируется следующим образом: уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразования, описывающего переход от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно.

Преобразования Галилея. Рассмотрим две системы отсчета, одна из которых неподвижна, а другая движется прямолинейно и равномерно. Декартовы оси координат неподвижной системы отсчета обозначим  $x, y, z$ , оси координат движущейся системы отсчета обозначим  $x', y', z'$ . Пусть движущаяся система отсчета движется со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$  неподвижной системы. Направим оси  $x', y', z'$  движущейся системы отсчета параллельно осям  $x, y, z$  неподвижной системы (рис. 55.1).



Неподвижная и движущаяся  
системы отсчета  
Рис. 55.1.

Рассмотрим материальную точку  $M$ , движущуюся произвольным образом. Координаты этой точки относительно двух указанных систем отсчета связаны между собой соотношениями

$$x = x' + Vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Эти соотношения называются преобразованиями Галилея. Здесь  $x, y, z$  – декартовы координаты точки  $M$  относительно неподвижной системы отсчета,  $x', y', z'$  – координаты той же точки относительно подвижной системы,  $V$  – скорость движения подвижной системы относительно неподвижной,  $t$  – время, отсчитываемое от момента, когда начала систем отсчета совпадают.

Из преобразований Галилея вытекают следующие правила сложения скоростей

$$v_x = v'_x + V$$

$$v_y = v'_y$$

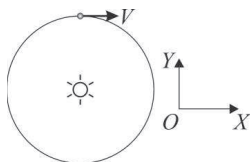
$$v_z = v'_z$$

Они означают, что абсолютная скорость материальной точки равна относительной скорости плюс скорость системы отсчета. Это правило называется правилом сложения скоростей Галилея.

Проблема с теорией электромагнитного поля. Эти представления не вызывали сомнений до середины 19 века, когда были открыты уравнения электромагнитного поля (Максвелл, 1865). Тогда оказалось, что уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея. Возникла ситуация, когда следовало признать ошибочность либо принципа относительности, либо преобразований Галилея, либо уравнений Максвелла. Для решения этого вопроса был проведен эксперимент, целью

которого было проверить правило сложения скоростей Галилея для световых волн. Такой опыт провел американский физик Альберт Майкельсон (1887).

Верно ли правило сложения скоростей Галилея для световых волн? Решить этот вопрос трудно из-за большой величины скорости света. Для проведения опыта нужна быстро движущаяся система отсчета. Майкельсон решил в качестве такой системы использовать земной шар в его движении вокруг Солнца (рис. 55.2).



Движение Земли по орбите  
вокруг Солнца

Рис. 55.2.

Известно, что скорость движения Земли относительно Солнца

$$V = 3 \cdot 10^4 \text{ м/с}$$

Но даже эта скорость значительно меньше скорости света, которая составляет

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

Гипотеза неподвижного эфира. Эта гипотеза выражается формулами

$$v_x = v'_x + V$$

$$v_y = v'_y$$

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2$$

Здесь оси  $x, y$  лежат в плоскости движения Земли по орбите,  $v_x, v_y$  - компоненты скорости света относительно Солнца,  $v'_x, v'_y$  - компоненты скорости света относительно Земли,  $V$  - скорость движения Земли относительно Солнца.

Гипотеза неподвижного эфира выражает правило сложения скоростей Галилея и приписывает определенную скорость свету в некоторой выделенной системе отсчета – системе «эфира». Считается, что это система отсчета, связанная с Солнцем. При этом скорость света в других системах отсчета, в частности, на Земле, не равна « $c$ », а определяется правилом Галилея и зависит от скорости движения этой системы относительно Солнца.

Как проверить эту гипотезу экспериментально? Оставаясь на Земле, можно измерять и сравнивать между собой скорости света относительно Земли, но в разных направлениях по отношению к направлению движения Земли по орбите. Эти скорости называются

продольной и поперечной скоростями света. Из гипотезы неподвижного эфира следует, что эти скорости должны отличаться друг от друга.

Продольная и поперечная скорости света. Так называются компоненты скорости света относительно Земли в направлениях вдоль и поперек направления движения Земли по орбите. Обозначим эти скорости  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  соответственно.

Продольная скорость света определяется формулой

$$v_{\parallel} = |v'_x|$$

при условии, что

$$v'_y = 0$$

Из гипотезы неподвижного эфира следует, что

$$v_{\parallel} = c \pm V$$

Поперечная скорость света определяется формулой

$$v_{\perp} = |v'_y|$$

при условии, что

$$v'_x = 0$$

Из гипотезы неподвижного эфира следует

$$v_{\perp} = \sqrt{c^2 - V^2}$$

Видно, что продольная и поперечная скорости света относительно Земли отличаются друг от друга:

$$v_{\parallel} \neq v_{\perp}$$

Этот факт можно использовать для проверки гипотезы неподвижно эфира.

Однако относительное различие этих скоростей очень мало. Нужно было найти такое физическое явление, которое позволило бы заметить эту разницу. Майкельсон решил использовать для этой цели явление интерференции света.

Опыт Майкельсона. Интерференцией света называется взаимная компенсация действия световых волн в некоторых точках пространства. Это явление объясняется волновой природой света.

Для проведения опыта был построен специальный прибор, который получил название интерферометра Майкельсона. В этом приборе луч света от источника падает под углом в 45 градусов на полупрозрачную стеклянную пластинку, которая наполовину отражает и наполовину пропускает свет. Отраженный и прошедший через пластину лучи света проходят некоторые расстояния, после чего попадают на зеркала, отражающие их прямо назад. Эти два луча снова попадают на ту же делительную пластинку, где каждый из них наполовину отражается и наполовину пропускается. В итоге образуются два параллельных луча света, прошедшие через взаимно перпендикулярные плечи интерферометра. Эти лучи сводятся на экране наблюдения, где образуют интерференционную картину (рис. 55.3).

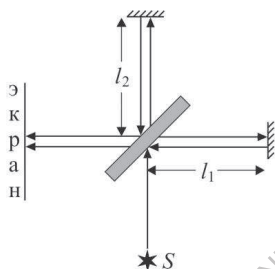
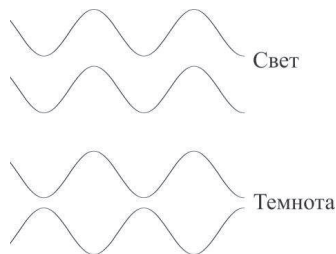


Схема интерферометра Майкельсона  
Рис. 55.3.

Вид интерференционной картины зависит от разности фаз световых волн, падающих на экран наблюдения. Если в данную точку экрана наблюдения две световые волны приходят в одной и той же фазе, то в этой точке наблюдается яркий свет. Если же волны приходят в противофазе, то наблюдается темнота (рис. 55.4).



Явление интерференции света  
Рис. 55.4.

Разность фаз интерферирующих волн зависит от длин плеч интерферометра и разности скоростей света в этих плечах. Конструкция прибора предусматривает возможность поворота интерферометра вокруг вертикальной оси с тем, чтобы в процессе эксперимента менять ориентацию плеч интерферометра по отношению к направлению движения Земли по орбите. Согласно гипотезе неподвижного эфира такие повороты должны приводить к

изменению наблюдаемой интерференционной картины. Однако в опыте таких изменений не наблюдалось. Это позволило Майкельсону сделать вывод о том, что гипотеза неподвижного эфира ошибочна.

Принцип постоянства скорости света. Результат опыта Майкельсона можно объяснить, если допустить, что скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета – покоящейся или движущейся – она определяется. Это утверждение называется принципом постоянства скорости света. Математически этот принцип выражается формулой

$$v_{\text{абс}} = v_{\text{отн}} = c$$

согласно которой абсолютная скорость света равна его относительной скорости.

Относительность времени. Принцип постоянства скорости света можно понять, если допустить, что время течет по-разному в разных системах отсчета.

Запишем принцип постоянства скорости света в терминах координат и времени. Для этого рассмотрим две системы отсчета – неподвижную и движущуюся – как мы определили их ранее. Допустим, что в момент времени  $t = 0$  вдоль оси  $x$  неподвижной системы начинает распространяться световая волна. Согласно принципу постоянства скорости света, движение фронта световой волны в указанных двух системах отсчета описывается формулами

$$x = ct$$

и

$$x' = ct'$$

Здесь  $x$  - координата фронта световой волны в неподвижной системе отсчета, в момент времени  $t$  по часам неподвижной системы;  $x'$  - координата фронта той же волны в движущейся системе отсчета в момент времени  $t'$  по часам движущейся системы. Одна и та же точка (фронт световой волны) имеет разные координаты в неподвижной и движущейся системах отсчета, т.е.

$$x \neq x'$$

Поэтому мы приходим к выводу, что времена  $t$  и  $t'$  в написанных выше формулах также отличаются друг от друга, т.е.

$$t \neq t'$$

Эта формула и выражает эффект относительности времени.

Итак, мы приходим к выводу, что движение влияет на время. Эта идея лежит в основе теории относительности.

Преобразования Лоренца. Относительность времени меняет постановку вопроса о преобразованиях, описывающих переход от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно. Такие преобразования должны включать в себя формулы не только для координат, но и для времени. Искомые преобразования должны удовлетворять принципу постоянства скорости света, а при малых скоростях движения переходить в преобразования Галилея. Этим требованиям удовлетворяют преобразования Лоренца, которые имеют следующий вид

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Здесь  $x, y, z$  - координаты некоторой точки в неподвижной системе отсчета в момент времени  $t$  по часам неподвижной системы,  $x', y', z'$  - координаты той же самой точки в момент времени  $t'$  по часам движущейся системы отсчета,  $V$  - скорость движущейся системы отсчета,  $c$  - скорость света.

Обратные преобразования имеют вид

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

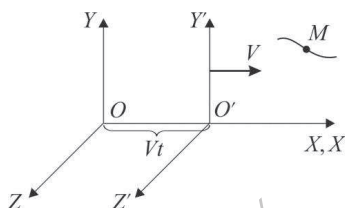
Принцип относительности Эйнштейна. Согласно этому принципу, уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Заметим, что уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) удовлетворяют этому принципу.

## 56. Кинематика в теории относительности

Преобразования Лоренца. Правила преобразования скоростей материальной точки при изменении системы отсчета. Правила преобразования ускорений точки при изменении системы отсчета.

В этом параграфе, используя преобразования Лоренца, мы найдем релятивистские правила преобразования скоростей и ускорений материальной точки при переходе от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно.

Преобразования Лоренца. Рассмотрим движение материальной точки  $M$  относительно двух разных систем отсчета, одна из которых неподвижна, а другая движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$  неподвижной системы. Будем считать, что декартовы оси координат неподвижной системы отсчета  $x, y, z$ , параллельны осям координат движущейся системы отсчета  $x', y', z'$ . Отсчет времени по часам обеих указанных систем отсчета будем вести от момента, когда начала этих систем совпадают (рис. 56.1).



Неподвижная и движущаяся системы отсчета  
Рис. 56.1

Тогда справедливы преобразования Лоренца (см. параграф 55)

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Здесь  $x, y, z$  - координаты точки  $M$  в неподвижной системе отсчета в момент времени  $t$  по часам неподвижной системы,  $x', y', z'$  - координаты той же самой точки в момент времени  $t'$  по часам движущейся системы отсчета,  $V$  - скорость движущейся системы отсчета,  $c$  - скорость света.

Правила преобразования скоростей материальной точки при изменении системы отсчета. Декартовы компоненты скорости материальной точки относительно двух указанных систем отсчета определяются формулами



$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

и

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

Найдем связь между этими величинами. Для этого возьмем дифференциалы от правой и левой частей формул, описывающих преобразования Лоренца. Получим

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$dt = \frac{dt' + (V/c^2) dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

Используя эти формулы, находим

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + (V/c^2) dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + (V/c^2) dx'} = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + (V/c^2) dx'} = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}$$

Итак,

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}$$

Эти формулы выражают релятивистские правила преобразования скоростей при изменении системы отсчета. Обратные преобразования имеют вид

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 + v_x V/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}$$

$$v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}$$

Правила преобразования ускорений материальной точки при изменении системы отсчета. Декартовы компоненты ускорений материальной точки относительно двух указанных систем отсчета определяются формулами

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

и

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}$$

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'}$$

$$a'_z = \frac{dv'_z}{dt'}$$

Найдем связь между этими величинами. Для этого возьмем дифференциалы от правой и левой частей формул, описывающих преобразования скоростей. Получим

$$dv_x = \frac{(1 + v'_x V/c^2)dv'_x - (v'_x + V)(V/c^2)dv'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^2} = \frac{(1 - V^2/c^2)dv'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^2}$$

$$dv_y = \sqrt{1 - V^2/c^2} \frac{(1 + v'_x V/c^2)dv'_y - v'_y(V/c^2)dv'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^2}$$

$$dv_z = \sqrt{1 - V^2/c^2} \frac{(1 + v'_x V/c^2)dv'_z - v'_z(V/c^2)dv'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^2}$$

Используя эти формулы, находим

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{(1 - V^2/c^2)dv'_x \sqrt{1 - V^2/c^2}}{(1 + v'_x V/c^2)^2(dt' + (V/c^2)dx')} = a'_x \frac{(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 + v'_x V/c^2)^3}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = (1 - V^2/c^2) \frac{(1 + v'_x V/c^2)dv'_y - v'_y(V/c^2)dv'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^2(dt' + (V/c^2)dx')}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = (1 - V^2/c^2) \frac{(1 + v'_x V/c^2)dv'_z - v'_z(V/c^2)dv'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^2(dt' + (V/c^2)dx')}$$

или

$$a_x = a'_x \frac{(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 + v'_x V/c^2)^3}$$

$$a_y = (1 - V^2/c^2) \frac{(1 + v'_x V/c^2)a'_y - a'_x v'_y V/c^2}{(1 + v'_x V/c^2)^3}$$

$$a_z = (1 - V^2/c^2) \frac{(1 + v_x'V/c^2)a_z' - a_x'v_z'V/c^2}{(1 + v_x'V/c^2)^3}$$

Таковы релятивистские правила преобразования ускорений. Обратные преобразования имеют вид

$$a_x' = a_x \frac{(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 - v_xV/c^2)^3}$$

$$a_y' = (1 - V^2/c^2) \frac{(1 - v_xV/c^2)a_y + a_xv_yV/c^2}{(1 - v_xV/c^2)^3}$$

$$a_z' = (1 - V^2/c^2) \frac{(1 - v_xV/c^2)a_z + a_xv_zV/c^2}{(1 - v_xV/c^2)^3}$$

### 57. Релятивистское уравнение движения

Релятивистское уравнение движения. Вывод релятивистского уравнения движения. Релятивистский импульс. Уточнение понятия массы.

Релятивистское уравнение движения. Это уравнение, обобщающее второй закон Ньютона на случай движения частицы с большой скоростью (порядка скорости света). Оно имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

где

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Здесь  $m$  - масса материальной точки,  $\vec{v}$  - ее скорость,  $c$  - скорость света,  $\vec{F}$  - сила, действующая на материальную точку. В качестве силы  $\vec{F}$  в уравнении фигурирует сила, действующая на заряженную частицу в электромагнитном поле (сила Лоренца – см. параграф 10)

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Здесь  $q$  - заряд частицы,  $\vec{v}$  – ее скорость,  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{B}$  – магнитная индукция. Квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов.

Главная особенность релятивистского уравнения движения заключается в том, что оно устанавливает предельную скорость движения частиц, равную скорости света.

Вывод релятивистского уравнения движения. Для вывода этого уравнения нам понадобятся уравнения электромагнитного поля. Эти уравнения выводятся в курсе электродинамики и имеют вид

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Здесь  $E_x, E_y, E_z$  и  $B_x, B_y, B_z$  – декартовы компоненты напряженности электрического поля и магнитной индукции,  $x, y, z$  – декартовы координаты точки наблюдения поля,  $t$  – время,  $c$  – скорость света. Все величины относятся к неподвижной системе отсчета.

При переходе к системе отсчета, движущейся прямолинейно и равномерно, координаты и время меняются в соответствии с преобразованиями Лоренца. Принцип относительности указывает на то, что при таком переходе должны стать иными и характеристики электромагнитного поля.

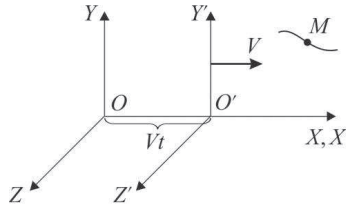
Остановимся на этом подробнее. В соответствии с принципом относительности, в движущейся системе отсчета уравнения электромагнитного поля должны иметь вид

$$\frac{\partial E'_z}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial z'} = \frac{\partial B'_y}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'}$$

где штрихами отмечены величины, относящиеся к движущейся системе отсчета.

Рассмотрим две системы отсчета в стандартной конфигурации, когда одна из них неподвижна, а другая движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$  неподвижной системы. Будем считать, что декартовы оси координат неподвижной системы отсчета  $x, y, z$ , параллельны осям координат движущейся системы отсчета  $x', y', z'$ . Отсчет времени по часам обеих указанных систем отсчета будем вести от момента, когда начала этих систем совпадают (рис. 57.1).



Неподвижная и движущаяся системы отсчета  
Рис. 57.1.

Преобразования Лоренца представим в виде

$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

где  $x, y, z$  - координаты некоторой точки  $M$  в неподвижной системе отсчета в момент времени  $t$  по часам неподвижной системы,  $x', y', z'$  - координаты той же самой точки в момент времени  $t'$  по часам движущейся системы отсчета,  $V$  - скорость движущейся системы отсчета,  $c$  - скорость света. Здесь и далее в этом параграфе использованы обозначения

$$\beta = V/c$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

Из приведенных формул можно вывести правила преобразования электромагнитного поля при изменении системы отсчета. Эти правила выражаются формулами

$$E'_x = E_x$$

$$B'_x = B_x$$

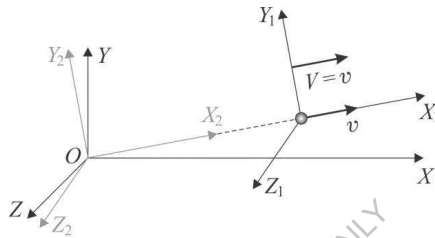
$$E'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z)$$

$$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y)$$

$$B'_z = \gamma \left( B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right)$$

Рассмотрим движение заряженной частицы в электромагнитном поле. Введем три системы отсчета: лабораторную систему  $S$  с осями  $x, y, z$ ; сопровождающую систему  $S_1$  с осями  $x_1, y_1, z_1$ ; и неподвижную систему  $S_2$  с осями  $x_2, y_2, z_2$ , параллельными осям сопровождающей системы  $x_1, y_1, z_1$ . Сопровождающую систему  $S_1$  определим как систему, относительно которой скорость частицы в данный момент времени равна нулю (рис. 57.2).



К выводу релятивистского уравнения движения

Рис. 57.2.

В этой системе отсчета для частицы справедлив второй закон Ньютона. Ось координат  $x_1$  сопровождающей системы отсчета направим вдоль вектора скорости частицы  $\vec{v}$ . Относительно неподвижной системы отсчета сопровождающая система движется со скоростью  $V$ , равной скорости частицы  $v$ . Таким образом,

$$V = v$$

Декартовы компоненты скорости и ускорения частицы относительно системы  $S$  обозначим  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  и  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ ; компоненты скорости и ускорения частицы относительно системы  $S_1$  обозначим  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$  и  $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1$ ; компоненты скорости и ускорения частицы относительно системы  $S_2$  обозначим  $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$  и  $\ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{z}_2$ . Заметим, что по определению сопровождающей системы отсчета

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{y}_1 = 0$$

$$\dot{z}_1 = 0$$

Компоненты электромагнитного поля относительно системы  $S$  обозначим  $E_x, E_y, E_z$  и  $B_x, B_y, B_z$ ; компоненты электромагнитного поля относительно системы  $S_1$  обозначим

$E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}$  и  $B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}$ ; компоненты электромагнитного поля относительно системы  $S_2$  обозначим  $E_{2x}, E_{2y}, E_{2z}$  и  $B_{2x}, B_{2y}, B_{2z}$ .

Вывод релятивистского уравнения движения проведем в три этапа. Сначала запишем уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле относительно сопровождающей системы отсчета. Затем перейдем к неподвижной системе отсчета, орты которой параллельны ортам сопровождающей системы. После этого перейдем к лабораторной системе отсчета, орты которой направлены произвольно относительно ортов сопровождающей системы.

Уравнение движения частицы относительно сопровождающей системы запишем в форме второго закона Ньютона. Переходя от сопровождающей системы отсчета к неподвижной системе, будем использовать правила преобразования ускорений, выведенные в параграфе 56, а также правила преобразования электромагнитного поля, представленные выше. Наконец, на этапе перехода от одной неподвижной системы отсчета к другой, воспользуемся матрицей поворота и правилами преобразования компонент вектора, сформулированными в параграфе 5.

Уравнения движения частицы относительно сопровождающей системы отсчета имеют вид

$$m\ddot{x}_1 = qE_{1x}$$

$$m\ddot{y}_1 = qE_{1y}$$

$$m\ddot{z}_1 = qE_{1z}$$

Перейдем к неподвижной системе отсчета  $S_2$ , оси которой параллельны осям сопровождающей системы. Для этого используем правила преобразования ускорения и правила преобразования электромагнитного поля. Получим

$$m \frac{\ddot{x}_2}{(1 - \dot{x}_2\beta/c)^3 \gamma^3} = qE_{2x}$$

$$m \frac{(1 - \dot{x}_2\beta/c)\ddot{y}_2 + \dot{x}_2\dot{y}_2\beta/c}{(1 - \dot{x}_2\beta/c)^3 \gamma^2} = q\gamma(E_{2y} - \beta c B_{2z})$$

$$m \frac{(1 - \dot{x}_2\beta/c)\ddot{z}_2 + \dot{x}_2\dot{z}_2\beta/c}{(1 - \dot{x}_2\beta/c)^3 \gamma^2} = q\gamma(E_{2z} + \beta c B_{2y})$$

Далее перейдем от неподвижной системы отсчета  $S_2$  к лабораторной системе отсчета  $S$ . Для этого используем матрицу поворота. Напомним, что элементами этой матрицы являются скалярные произведения ортов двух координатных систем - исходной и повернутой. Чтобы построить эту матрицу, введем орты сопровождающей системы отсчета  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ . Положим



$$\vec{e}'_1 = \vec{v}/v = \frac{1}{v}(\vec{e}_1\dot{x} + \vec{e}_2\dot{y} + \vec{e}_3\dot{z})$$

$$\vec{e}'_2 = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}'_1]}{||[\vec{e}_1, \vec{e}'_1]||}$$

$$\vec{e}'_3 = [\vec{e}'_1, \vec{e}'_2]$$

Здесь  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – орты лабораторной системы  $S$ . Квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов. Раскрывая векторное произведение в декартовых координатах, получим

$$[\vec{e}_1, \vec{e}'_1] = \frac{1}{v} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \frac{-\dot{z}\vec{e}_2 + \dot{y}\vec{e}_3}{v}$$

Отсюда

$$||[\vec{e}_1, \vec{e}'_1]|| = \frac{1}{v}\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Обозначим

$$\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} = u$$

Тогда

$$||[\vec{e}_1, \vec{e}'_1]|| = u/v$$

и

$$\vec{e}'_2 = \frac{1}{u}(\vec{e}_3\dot{y} - \vec{e}_2\dot{z})$$

$$\vec{e}'_3 = \frac{1}{uv} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & -\dot{z} & \dot{y} \end{vmatrix} = \frac{1}{uv}(\vec{e}_1\dot{y}^2 + \vec{e}_1\dot{z}^2 - \vec{e}_2\dot{x}\dot{y} - \vec{e}_3\dot{x}\dot{z})$$

Итак,

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{v}(\vec{e}_1\dot{x} + \vec{e}_2\dot{y} + \vec{e}_3\dot{z})$$

$$\vec{e}'_2 = \frac{1}{u} (\vec{e}_3 \dot{y} - \vec{e}_2 \dot{z})$$

$$\vec{e}'_3 = \frac{1}{uv} [(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) \vec{e}_1 - \dot{x} \dot{y} \vec{e}_2 - \dot{x} \dot{z} \vec{e}_3]$$

Вычислим элементы матрицы поворота

$$S_{ij} = \vec{e}'_i \vec{e}_j$$

Элементы первой строки

$$S_{11} = \vec{e}'_1 \vec{e}_1 = \frac{\dot{x}}{v}$$

$$S_{12} = \vec{e}'_1 \vec{e}_2 = \frac{\dot{y}}{v}$$

$$S_{13} = \vec{e}'_1 \vec{e}_3 = \frac{\dot{z}}{v}$$

Элементы второй строки

$$S_{21} = \vec{e}'_2 \vec{e}_1 = 0$$

$$S_{22} = \vec{e}'_2 \vec{e}_2 = -\frac{\dot{z}}{u}$$

$$S_{23} = \vec{e}'_2 \vec{e}_3 = \frac{\dot{y}}{u}$$

Элементы третьей строки

$$S_{31} = \vec{e}'_3 \vec{e}_1 = \frac{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}{uv}$$

$$S_{32} = \vec{e}'_3 \vec{e}_2 = \frac{-\dot{x} \dot{y}}{uv}$$

$$S_{33} = \vec{e}'_3 \vec{e}_3 = \frac{-\dot{x} \dot{z}}{uv}$$

Итак, матрица поворота построена. Теперь можно выполнить преобразование всех интересующих нас векторов при переходе от системы  $S_2$  к системе  $S$ .

Формулы преобразования компонент скорости частицы:

$$\dot{x}_2 = S_{11}\dot{x} + S_{12}\dot{y} + S_{13}\dot{z} = \frac{\dot{x}}{v}\dot{x} + \frac{\dot{y}}{v}\dot{y} + \frac{\dot{z}}{v}\dot{z} = v = V$$

$$\dot{y}_2 = S_{21}\dot{x} + S_{22}\dot{y} + S_{23}\dot{z} = -\frac{\dot{z}}{u}\dot{y} + \frac{\dot{y}}{u}\dot{z} = 0$$

$$\dot{z}_2 = S_{31}\dot{x} + S_{32}\dot{y} + S_{33}\dot{z} = \frac{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}{uv}\dot{x} - \frac{\dot{x}\dot{y}}{uv}\dot{y} - \frac{\dot{x}\dot{z}}{uv}\dot{z} = 0$$

Формулы преобразования компонент ускорения частицы:

$$\ddot{x}_2 = S_{11}\ddot{x} + S_{12}\ddot{y} + S_{13}\ddot{z} = \frac{\dot{x}}{v}\ddot{x} + \frac{\dot{y}}{v}\ddot{y} + \frac{\dot{z}}{v}\ddot{z}$$

$$\ddot{y}_2 = S_{21}\ddot{x} + S_{22}\ddot{y} + S_{23}\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{u}\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{u}\ddot{z}$$

$$\ddot{z}_2 = S_{31}\ddot{x} + S_{32}\ddot{y} + S_{33}\ddot{z} = \frac{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}{uv}\ddot{x} - \frac{\dot{x}\dot{y}}{uv}\ddot{y} - \frac{\dot{x}\dot{z}}{uv}\ddot{z}$$

Формулы преобразования компонент напряженности электрического поля:

$$E_{2x} = S_{11}E_x + S_{12}E_y + S_{13}E_z = \frac{\dot{x}}{v}E_x + \frac{\dot{y}}{v}E_y + \frac{\dot{z}}{v}E_z$$

$$E_{2y} = S_{21}E_x + S_{22}E_y + S_{23}E_z = -\frac{\dot{z}}{u}E_y + \frac{\dot{y}}{u}E_z$$

$$E_{2z} = S_{31}E_x + S_{32}E_y + S_{33}E_z = \frac{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}{uv}E_x - \frac{\dot{x}\dot{y}}{uv}E_y - \frac{\dot{x}\dot{z}}{uv}E_z$$

Формулы преобразования компонент магнитной индукции:

$$B_{2x} = S_{11}B_x + S_{12}B_y + S_{13}B_z = \frac{\dot{x}}{v}B_x + \frac{\dot{y}}{v}B_y + \frac{\dot{z}}{v}B_z$$

$$B_{2y} = S_{21}B_x + S_{22}B_y + S_{23}B_z = -\frac{\dot{z}}{u}B_y + \frac{\dot{y}}{u}B_z$$

$$B_{2z} = S_{31}B_x + S_{32}B_y + S_{33}B_z = \frac{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}{uv}B_x - \frac{\dot{x}\dot{y}}{uv}B_y - \frac{\dot{x}\dot{z}}{uv}B_z$$

Используя эти формулы, уравнения движения частицы можно представить в виде

$$m\gamma^3 \ddot{x}_2 = qE_{2x}$$

$$m\gamma \ddot{y}_2 = q(E_{2y} - \beta c B_{2z})$$

$$m\gamma \ddot{z}_2 = q(E_{2z} + \beta c B_{2y})$$

или

$$m\gamma^3 \left( \frac{\dot{x}}{v} \ddot{x} + \frac{\dot{y}}{v} \ddot{y} + \frac{\dot{z}}{v} \ddot{z} \right) = qE_{2x}$$

$$m\gamma \left( -\frac{\dot{z}}{u} \ddot{y} + \frac{\dot{y}}{u} \ddot{z} \right) = q(E_{2y} - \beta c B_{2z})$$

$$m\gamma \left( \frac{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}{uv} \ddot{x} - \frac{\dot{x}\dot{y}}{uv} \ddot{y} - \frac{\dot{x}\dot{z}}{uv} \ddot{z} \right) = q(E_{2z} + \beta c B_{2y})$$

Представим эти уравнения в виде

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = A$$

$$\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y} = B$$

$$(\dot{y}^2 + \dot{z}^2)\ddot{x} - (\dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})\dot{x} = C$$

Здесь введены обозначения

$$A = \frac{qv}{m\gamma^3} E_{2x}$$

$$B = \frac{qu}{m\gamma} (E_{2y} - \beta c B_{2z})$$

$$C = \frac{quv}{m\gamma} (E_{2z} + \beta c B_{2y})$$

Разрешая уравнения относительно  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ , получим

$$\ddot{x} = \frac{C + A\dot{x}}{v^2}$$

$$\ddot{y} = \frac{A\dot{y}u^2 - B\dot{z}v^2 - C\dot{x}\dot{y}}{u^2v^2}$$

$$\ddot{z} = \frac{A\dot{z}u^2 + B\dot{y}v^2 - C\dot{x}\dot{z}}{u^2v^2}$$

где

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$u^2 = \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Отсюда

$$\frac{m\gamma}{q} \ddot{x} = E_x - \frac{\dot{x}}{c^2} (\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z) + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y$$

$$\frac{m\gamma}{q} \ddot{y} = E_y - \frac{\dot{y}}{c^2} (\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z) + \dot{z}B_x - \dot{x}B_z$$

$$\frac{m\gamma}{q}\ddot{z} = E_z - \frac{\dot{z}}{c^2}(\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z) + \dot{x}B_y - \dot{y}B_x$$

Умножим эти уравнения соответственно на  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  и сложим. Получим

$$\frac{m\gamma}{q}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = (\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z)(1 - v^2/c^2)$$

откуда

$$\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z = \frac{m\gamma}{q} \frac{(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(1 - v^2/c^2)}$$

Подставив это выражение в уравнения движения, находим

$$\frac{m\ddot{x}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = qE_x + q(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)$$

$$\frac{m\ddot{y}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = qE_y + q(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z)$$

$$\frac{m\ddot{z}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m\dot{z}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = qE_z + q(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x)$$

В векторной форме эти уравнения принимают вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Тем самым вывод релятивистского уравнения движения завершен. Отметим, что в такой форме этот вывод был впервые дан Максом Планком в 1906 году.

Релятивистский импульс. Величина

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

называется релятивистским импульсом частицы. Здесь  $m$  - масса материальной точки,  $\vec{v}$  - ее скорость,  $c$  - скорость света. При скорости частицы много меньшей скорости света релятивистский импульс переходит в обычный импульс. При этом релятивистское уравнение движения переходит во второй закон Ньютона.

Уточнение понятия массы. Теперь мы можем уточнить понятие массы материальной точки. А именно, к данному выше определению массы (см. параграф 7) следует добавить, что масса является мерой инертности тела при скорости тела, много меньшей скорости света. Измерение массы тела следует проводить при скорости тела, значительно меньшей скорости света.

## 58. Импульс и энергия в теории относительности

Релятивистский импульс и релятивистская энергия. Закон изменения релятивистского импульса. Закон сохранения импульса в теории относительности. Преобразование релятивистского импульса и релятивистской энергии при изменении системы отсчета. Закон сохранения энергии в теории относительности. Энергия покоя тела. Взаимные превращения массы и энергии. Фотон. Световое давление. Факты, подтверждающие теорию относительности.

Релятивистский импульс и релятивистская энергия. Релятивистским импульсом частицы называется величина

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Релятивистской энергией частицы называется величина

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Здесь  $m$  - масса материальной точки,  $\vec{v}$  - ее скорость,  $c$  - скорость света.

Релятивистским импульсом системы частиц называется сумма релятивистских импульсов отдельных частиц системы

$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

Релятивистской энергией системы частиц называется сумма релятивистских энергий отдельных частиц системы

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

Закон изменения релятивистского импульса. Рассмотрим систему заряженных частиц в электромагнитном поле. Запишем релятивистское уравнение движения для одной из частиц системы

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$$

Здесь точка над буквой обозначает дифференцирование по времени, индекс « $i$ » нумерует частицы системы,  $\vec{p}_i$  – релятивистский импульс частицы с номером « $i$ »,  $\vec{F}_i$  – внешняя сила, действующая на данную частицу,  $\vec{f}_{ij}$  – внутренняя сила, действующая на частицу с номером « $i$ » со стороны частицы с номером « $j$ ».

Просуммируем такие уравнения по всем частицам системы. Учитывая, что сумма внутренних сил равна нулю, получим

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

где  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  обозначает сумму внешних сил. Таким образом, скорость изменения релятивистского импульса системы равна сумме внешних сил. Это утверждение выражает закон изменения релятивистского импульса для системы частиц.

Закон сохранения импульса в теории относительности. Если сумма внешних сил равна нулю

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$$

то релятивистский импульс системы сохраняется

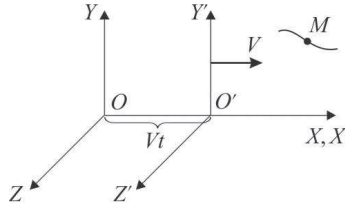
$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}$$

Преобразование релятивистского импульса и релятивистской энергии при изменении системы отсчета. Найдем законы изменения релятивистского импульса и релятивистской энергии при переходе от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно.

Рассмотрим две системы отсчета в стандартной конфигурации, когда одна из них неподвижна, а другая движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$



неподвижной системы. Будем считать, что декартовы оси координат неподвижной системы отсчета  $x, y, z$ , параллельны осям координат движущейся системы отсчета  $x', y', z'$ . Отсчет времени по часам обеих указанных систем отсчета будем вести от момента, когда начала этих систем совпадают (рис. 58.1).



Неподвижная и движущаяся системы отсчета  
Рис. 58.1

Пусть  $p_x, p_y, p_z, E$  – декартовы компоненты релятивистского импульса частицы и ее релятивистская энергия относительно неподвижной системы отсчета, а  $p'_x, p'_y, p'_z, E'$  – декартовы компоненты релятивистского импульса частицы и ее релятивистская энергия относительно движущейся системы отсчета. Тогда

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и

$$p'_x = \frac{mv'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

$$p'_y = \frac{mv'_y}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

$$p'_z = \frac{mv'_z}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

$$E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

Здесь

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

и

$$v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2$$

$v_x, v_y, v_z$  – декартовы компоненты скорости частицы относительно неподвижной системы отсчета,  $v_x', v_y', v_z'$  – декартовы компоненты скорости той же самой частицы относительно движущейся системы отсчета,  $c$  – скорость света.

При изменении системы отсчета декартовы компоненты скорости частицы преобразуются в соответствии с правилами (см. параграф 56)

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x'V/c^2}$$

$$v_y = \frac{v_y'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v_x'V/c^2}$$

$$v_z = \frac{v_z'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v_x'V/c^2}$$

Используя эти правила, преобразуем величину

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Получим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x'^2/c^2}} \frac{1 + v_x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Отсюда вытекают искомые формулы преобразования релятивистского импульса и релятивистской энергии частицы при изменении системы отсчета. Эти формулы имеют вид

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{V}{c^2} E'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$E = \frac{E' + Vp'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$p_y = p'_y$$

$$p_z = p'_z$$

Обратные преобразования выражаются формулами

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{V}{c^2}E}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$E' = \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

Для системы частиц представленные выше формулы приобретают вид

$$p_x = \sum_i \frac{m_i v_{ix}}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

$$p_y = \sum_i \frac{m_i v_{iy}}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

$$p_z = \sum_i \frac{m_i v_{iz}}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

и

$$p'_x = \sum_i \frac{m_i v'_{ix}}{\sqrt{1 - v_i'^2/c^2}}$$

$$p'_y = \sum_i \frac{m_i v'_{iy}}{\sqrt{1 - v_i'^2/c^2}}$$

$$p'_z = \sum_i \frac{m_i v'_{iz}}{\sqrt{1 - v_i'^2/c^2}}$$

$$E' = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i'^2/c^2}}$$

Закон сохранения энергии в теории относительности. Рассмотрим систему частиц, в которой частицы взаимодействуют только между собой, а внешние силы отсутствуют. Релятивистский импульс такой системы сохраняется. В частности,

$$p_x = const$$

Согласно принципу относительности Эйнштейна, уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Следовательно,

$$p'_x = const$$

Учитывая, что

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{V}{c^2} E}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

мы приходим к выводу, что для рассматриваемой системы

$$E = const$$

т.е. релятивистская энергия системы сохраняется.

Итак, если сумма внешних сил равна нулю

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$$

то релятивистская энергия системы сохраняется

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = const$$

Это утверждение выражает закон сохранения энергии в теории относительности. Отметим, что этот закон является следствием релятивистского закона сохранения импульса и принципа относительности.

В свою очередь, релятивистский закон сохранения энергии также подчиняется принципу относительности Эйнштейна. В самом деле, из формул

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{внеш}} &= 0 \\ E &= \text{const} \\ E' &= \text{const} \\ E' &= \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\end{aligned}$$

следует что

$$p_x = \text{const}$$

Последнее равенство выполняется вследствие закона сохранения релятивистского импульса. Таким образом, релятивистские законы сохранения импульса и энергии всегда действуют вместе. Если сумма внешних сил равна нулю

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$$

то релятивистский импульс и релятивистская энергия системы сохраняются:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const} \\ E &= \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}\end{aligned}$$

Энергия покоя тела. Релятивистская энергия отдельной частицы определяется формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

В частности, если скорость частицы равна нулю, то

$$E_0 = mc^2$$

Эта формула называется формулой Эйнштейна. Она выражает релятивистскую энергию покоящейся частицы, или, как коротко говорят, энергию покоя. Обратим внимание на большую величину этой энергии. Например, покоящееся тело массой  $m = 1\text{г}$  обладает энергией  $E_0 \approx 10^{14}\text{Дж}$ .

Разница между релятивистской энергией и энергией покоя частицы имеет смысл энергии движения частицы, т.е. ее релятивистской кинетической энергии

$$K = E - E_0$$

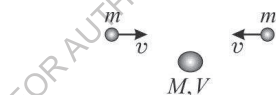
При скоростях частицы, много меньших скорости света, релятивистская кинетическая энергия переходит в обычную кинетическую энергию частицы

$$K = mv^2/2$$

Взаимные превращения массы и энергии. В качестве примера процесса, при котором сохраняются релятивистские импульс и энергия, рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел. Так называется удар, при котором сталкивающиеся частицы слипаются.

Согласно механике Ньютона, механическая энергия системы при таком ударе не сохраняется (она переходит в тепло). С точки зрения теории относительности, релятивистская энергия системы при неупругом столкновении частиц сохраняется.

Пусть два одинаковых тела массой  $m$  каждое летят навстречу друг другу с одинаковыми скоростями  $v$ . Происходит удар, в результате которого частицы слипаются (рис. 58.2). Найдём массу  $M$  и скорость  $V$  получившегося тела.



Модель неупругого удара

Рис. 58.2

Согласно релятивистским законам сохранения импульса и энергии

$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Отсюда

$$\vec{V} = 0$$

и

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Эти формулы показывают, что образовавшееся в результате удара тело будет покоиться, а его масса будет превышать суммарную массу сталкивающихся частиц

$$M > 2m$$

Иными словами, при неупругом ударе кинетическая энергия движения частиц переходит в энергию покоя, увеличивая массу системы.

Таким образом, теория относительности приводит к важному выводу о том, что возможны взаимные превращения массы и энергии. Практика подтверждает этот вывод. Наиболее заметные изменения массы происходят в ядерных реакциях. Так, при делении ядра урана масса системы уменьшается на несколько процентов. При этом выделяется огромная энергия. Эта энергия используется на атомных электростанциях, а также при взрыве атомной бомбы.

Фотон. Запишем выражения для релятивистского импульса и релятивистской энергии частицы:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Отсюда

$$\vec{p}c^2 = E\vec{v}$$

и

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

Положим

$$m = 0$$

Тогда

$$E = pc$$

и

$$v = c$$

Таким образом, теория относительности предсказывает существование частиц с нулевой массой, скорость которых равна скорости света. Это частица света или фотон. Энергия фотона  $E$  связана с его импульсом  $p$  соотношением

$$E = pc$$

где  $c$  - скорость света.

Световое давление. Существование импульса у фотона приводит к тому, что при поглощении света на тело действует сила светового давления. Найдем величину этой силы. Согласно релятивистскому уравнению движения,

$$\dot{p} = F$$

Подставим сюда

$$p = E/c$$

Получим

$$F = \dot{E}/c$$

или

$$F = P/c$$

где  $P$  - мощность света.

Итак, на поглощающее свет тело действует сила светового давления, равная отношению мощности светового пучка к скорости света. Сделаем численную оценку. Полагая

$$P = 1 \text{ кВт}$$

получим

$$F = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$$

Эта оценка показывает, что сила светового давления чрезвычайно мала. Поэтому ее трудно обнаружить и измерить экспериментально. Тем не менее, опыт подтверждает существование этой силы (Лебедев, 1900 г.).

Сила светового давления действует не только на поглощающие света тела, но и на тела излучающие, отражающие и преломляющие свет. В настоящее время сила светового давления находит практическое применение в устройствах, называемых лазерными



пинцетами. На основе силы светового давления может быть создан фотонный двигатель. Правда, для такого двигателя нужен чрезвычайно мощный источник света. Например, для создания силы тяги

$$F = 1\text{Н}$$

необходима мощность света

$$P = Fc = 3 \cdot 10^8 \text{Вт}$$

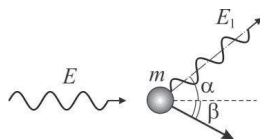
Факты, подтверждающие теорию относительности. К настоящему времени накоплен значительный экспериментальный материал, подтверждающий теорию относительности. Это замедление времени в движущихся системах отсчета, существование предельной скорости движения частиц, взаимные превращения массы и энергии и наконец, световое давление. Эти факты убедительно подтверждают теорию относительности.

### 59. Рассеяние фотонов на электронах

Эффект Комптона. Рассеяние фотона на релятивистском электроне и генерация рентгеновского излучения.

Представление о фотонах как частицах, вытекающее из теории относительности, позволяет по новому подойти к проблеме взаимодействия излучения и вещества. В данном параграфе мы рассмотрим эффект понижения частоты излучения при рассеянии на свободных электронах (эффект Комптона), а также генерацию рентгеновского излучения при рассеянии фотонов на релятивистских электронах.

Эффект Комптона. Рассмотрим рассеяние фотона на свободном электроне и найдем зависимость энергии рассеянного фотона от угла рассеяния. Схема процесса показана на рис. 59.1.



Эффект Комптона

Рис. 59.1

В процессе взаимодействия фотона и электрона сохраняются релятивистские импульс и энергия. Обозначим энергию падающего фотона  $E$ , энергию рассеянного фотона  $E_1$ , угол рассеяния фотона  $\alpha$ . Уравнения сохранения энергии и импульса запишем в виде

$$E + mc^2 = E_1 + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

$$\frac{E}{c} = \frac{E_1}{c} \cos\alpha + \frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \cos\beta$$

$$\frac{E_1}{c} \sin\alpha = \frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \sin\beta$$

Здесь  $v_1$  – скорость электрона, полученная им под действием фотона,  $\beta$  – угол между направлением движения падающего фотона и направлением движения электрона после взаимодействия с фотоном,  $m$  – масса электрона,  $c$  – скорость света. При выводе этих уравнений мы воспользовались соотношением между энергией и импульсом фотона

$$p = \frac{E}{c}$$

Исключая угол  $\beta$  из уравнений сохранения импульса, получим

$$(mc^2)^2 \frac{v_1^2/c^2}{1 - v_1^2/c^2} = E^2 + E_1^2 - 2EE_1 \cos\alpha$$

Из уравнения сохранения энергии

$$v_1^2/c^2 = \frac{(E - E_1)(E - E_1 + 2mc^2)}{(E - E_1 + mc^2)^2}$$

Подставив это выражение в предыдущее уравнение, получим

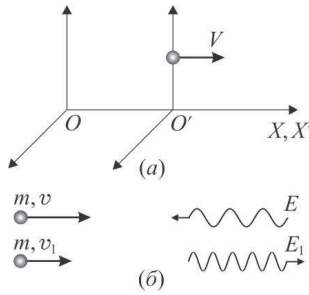
$$E^2 + E_1^2 - 2EE_1 \cos\alpha = (E - E_1)(E - E_1 + 2mc^2)$$

Отсюда

$$E_1 = \frac{E}{1 + \frac{E}{mc^2}(1 - \cos\alpha)}$$

Эта формула выражает искомую зависимость энергии рассеянного фотона  $E_1$  от угла рассеяния  $\alpha$ . Здесь  $E$  – энергия падающего фотона,  $m$  – масса электрона,  $c$  – скорость света. С учетом формулы Планка  $E = h\nu$  полученное выражение описывает зависимость частоты (или длины волны) рассеянного излучения от угла рассеяния. Эффект увеличения длины волны рассеянного излучения был обнаружен американским физиком Артуром Комптоном в опытах с рентгеновским излучением (1923).

Рассеяние фотона на релятивистском электроне и генерация рентгеновского излучения.  
Рассмотрим рассеяние фотона на релятивистском электроне. Допустим, что фотон с энергией  $E$  летит навстречу электрону, который имеет скорость  $v$ . Найдем энергию  $E_1$  рассеянного назад фотона (рис. 59.2).



Рассеяние фотона на  
релятивистском электроне  
Рис. 59.2.

Схема процесса показана на рис. 59.26. Направим ось  $x$  вдоль направления движения электрона. Используя релятивистские законы сохранения импульса и энергии, запишем

$$mv\gamma - \frac{E}{c} = \frac{mv_{1x}}{\sqrt{1 - v_{1x}^2/c^2}} + \frac{E_1}{c}$$

$$mc^2\gamma + E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_{1x}^2/c^2}} + E_1$$

Здесь

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

- релятивистский фактор,  $m$  – масса электрона,  $c$  – скорость света,  $v_{1x}$  – скорость электрона после взаимодействия с фотоном,  $m$  – масса электрона,  $c$  – скорость света. Введем безразмерные переменные

$$u = \frac{v}{c}$$

$$u_1 = \frac{v_{1x}}{c}$$

$$e = \frac{E}{mc^2}$$

$$e_1 = \frac{E_1}{mc^2}$$

Тогда

$$u\gamma - e = \frac{u_1}{\sqrt{1 - u_1^2}} + e_1$$

$$\gamma + e = \frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2}} + e_1$$

где

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2}$$

Отсюда

$$(u\gamma - e - e_1)^2 + 1 = (\gamma + e - e_1)^2$$

и

$$e_1 = e \frac{1 + u}{1 - u + 2e/\gamma}$$

Это выражение справедливо при любой начальной энергии электрона. В частности, если электрон неподвижен, то  $u = 0$ ,  $\gamma = 1$  и

$$e_1 = \frac{e}{1 + 2e}$$

в соответствии с формулой описывающей обратное комптоновское рассеяние.

Теперь рассмотрим случай, когда фотон рассеивается на релятивистском электроном. Полагая  $E = 1 \text{ эВ}$ ,  $\gamma = 100$  и учитывая, что  $mc^2 = 0.5 \text{ МэВ}$ , получим

$$e_1 \approx e \cdot (2\gamma)^2 = 4 \cdot 10^4 \text{ эВ}$$

Таким образом, рассеяние видимого света на релятивистских электронах может приводить к генерации рентгеновского излучения.

Этот результат можно получить и другим способом. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с электроном (сопровождающая система отсчета). Неподвижная и движущаяся системы отсчета показаны на рис. 59.2а. Скорость сопровождающей системы отсчета

$$V = v$$

Согласно релятивистскому правилу преобразования энергии (см. параграф 58), в сопровождающей системе отсчета падающий фотон имеет энергию

$$E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Подставляя сюда выражение для импульса фотона  $p_x = -E/c$ , получим

$$E' = E \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Энергию рассеянного назад фотона в сопровождающей системе отсчета найдем по формуле, описывающей обратное комптоновское рассеяние

$$E'_1 = \frac{E'}{1 + 2 \frac{E'}{mc^2}}$$

Теперь перейдем в неподвижную систему отсчета. Правило преобразования энергии имеет вид (см. параграф 58)

$$E_1 = \frac{E'_1 + p'_{1x}V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Здесь

$$p'_{1x} = E'_1/c$$

импульс рассеянного фотона в сопровождающей системе отсчета. Отсюда

$$e_1 = e \frac{1 + u}{1 - u + 2e/\gamma}$$

в соответствии с результатом, полученным выше.

Таким образом, эффекты, возникающие при взаимодействии света с веществом, подтверждают выводы теории относительности и демонстрируют корпускулярные свойства света.

## 60. Модель строения атома

Испускание и поглощение света атомом. Опыты Резерфорда. Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Волновые свойства электронов. Волна де Бройля. Модель атома Бора. Размер и энергия атома.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, как устроены мельчайшие частицы вещества – атомы. Для определенности будем вести речь о простейшем атоме – атоме водорода. Нашей главной задачей будет оценить размер и энергию атома.

Испускание и поглощение света атомом. Атомы способны испускать и поглощать свет не в любых количествах, а строго определенными порциями – квантами. К этому выводу пришел Макс Планк в 1900 году, пытаясь теоретически объяснить спектр излучения черного тела. Энергия кванта определяется формулой Планка

$$E = h\nu$$

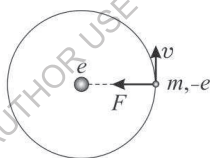
Здесь  $\nu$  – частота излучения,

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

- постоянная Планка.

Опыты Резерфорда. В 1911 году английский физик Резерфорд провел опыты, в которых было установлено существование ядра атома. Ядро атома это небольшая по размерам частица, в которой заключена почти вся масса атома. В опытах Резерфорда поток альфа частиц направлялся на тонкую золотую фольгу. Измерялось количество частиц, прошедших через фольгу и отраженных от нее назад. Оказалось, что вперед проходит намного больше частиц, чем отражается назад. Это и привело к представлению о существовании атомного ядра.

Планетарная модель атома. Согласно этой модели легкие частицы – электроны – вращаются вокруг ядра подобно тому, как планеты солнечной системы вращаются вокруг Солнца (рис. 60.1).



Планетарная модель атома

Рис. 60.1.

Планетарная модель атома позволила объяснить результаты опыта Резерфорда. Оказалось, что с ее помощью можно объяснить и линейчатый спектр излучения атома. Такое объяснение дал датский физик Нильс Бор. Он сформулировал два постулата, сыгравшие большую роль в квантовой физике.

Постулаты Бора. Первый постулат Бора: существуют стационарные состояния атомов, находясь которых атомы не испускают и не поглощают свет. Энергии стационарных состояний образуют дискретный ряд значений:

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

Второй постулат Бора: при переходе атома из одного стационарного состояния в другое, атом испускает или поглощает квант света с энергией, определяемой формулой

$$h\nu = E_n - E_m$$

Здесь  $E_n$  и  $E_m$  - энергии начального и конечного состояний атома.

Эти постулаты объясняют линейчатый спектр атомов. Далее возникает вопрос о том, каковы размеры атомов и энергии их стационарных состояний. Планетарная модель позволяет решить и эту проблему. Ключевая идея заключается в том, что электрон в атоме обладает волновыми свойствами.

Волновые свойства электронов. Эти свойства наблюдались в опытах по рассеянию электронов кристаллами никеля. Опыты провели Джермер и Дэвиссон в 1925 году. Картина рассеяния электронов кристаллом оказалась похожей на картину рассеяния кристаллами рентгеновских лучей – т. е. электромагнитных волн. В обоих случаях были видны несколько дифракционных максимумов, подобных тем, что возникают при рассеянии светового пучка на дифракционной решетке. Это навело на мысль о том, что электроны обладают волновыми свойствами.

Волна де Бройля. К этому времени уже было ясно, что свет обладает волновыми и корпускулярными свойствами. Французский физик Луи де Бройль предположил, что частицы вещества также обладают волновыми и корпускулярными свойствами. Эта идея оказалась очень плодотворной.

Попробуем найти длину волны де Бройля для частицы, например, для электрона. Будем использовать аналогию с фотоном. Мы знаем, что импульс фотона связан с его энергией формулой

$$p = E/c$$

(см. параграф 58). Подставим сюда формулу Планка

$$E = h\nu$$

Учтем, что

$$\nu = 1/T$$

и

$$cT = \lambda$$

где  $T$  – период световых колебаний,  $\lambda$  – длина световой волны. Получим

$$p = h/\lambda$$

Отсюда

$$\lambda = h/p$$

Эта формула связывает длину световой волны с импульсом фотона.

Допустим, что такая же связь существует между импульсом частицы вещества и длиной волны, связанной с этой частицей (волна де Бройля). Тогда для частицы с массой  $m$  и скоростью  $v$  можно записать

$$p = mv$$

и

$$\lambda = h/mv$$

Это выражение определяет длину волны де Бройля. Здесь  $mv$  - импульс частицы,  $h$  - постоянная Планка. Для обычных тел длина волны де Бройля очень мала и волновые свойства тел не играют заметной роли. Но для легких тел – электронов - длина волны де Бройля соизмерима с размером атома.

Модель атома Бора. Допустим, что в стационарном состоянии атома длина электронной орбиты кратна длине волны де Бройля для электрона. Это условие можно записать так

$$2\pi r = n\lambda$$

Здесь  $r$  - радиус электронной орбиты, а

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

натуральное число. Эта формула выражает квантовый постулат, а число  $n$  называется квантовым числом. Оно нумерует стационарные состояния атома.

Записывая уравнение движения электрона

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

и выражение для энергии атома

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

и



$$E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Таким образом, остается найти только радиус электронной орбиты (размер атома). Для этого выразим скорость электрона из уравнения

$$2\pi r = n \frac{h}{mv}$$

Получим

$$v = n \frac{h}{2\pi m r}$$

Подставим это выражение в уравнение движения электрона. Получим уравнение для радиуса электронной орбиты

$$\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Отсюда

$$r = n^2 \cdot \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

или

$$r_n = n^2 r_0$$

где

$$r_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

Здесь

$$h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

постоянная Планка,

$$m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

масса электрона,

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

заряд электрона,

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$$

электрическая постоянная.

Размер и энергия атома. Делая численную оценку, получим

$$r_0 = 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Эта величина определяет размер атома. Она называется боровским радиусом. Заметим, что по порядку величины оценка размера атома совпадает с оценкой размера молекулы, полученной в параграфе 48.

Энергия атома

$$E_n = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n}$$

или

$$E_n = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{n^2 r_0}$$

Эту величину можно представить в виде

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

где

$$E_0 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_0}$$

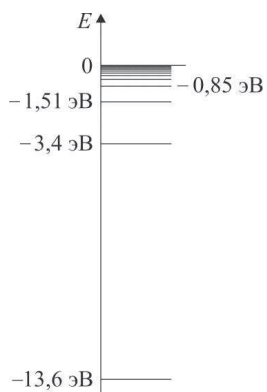
Делая численную оценку, получим

$$E_0 = 13.6 \text{ эВ}$$

Здесь использована единица энергии электрон-вольт:

$$\text{эВ} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

Величина  $E_0$  определяет энергию ионизации атома водорода.



Уровни энергии атома водорода  
Рис. 60.2.

Итак, модель атома Бора позволила определить размер и уровни энергии атома водорода (рис. 60.2). Экспериментальные исследования показали, что теория Бора хорошо объясняет спектр излучения атома водорода.

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

**More  
Books!**



yes  
**I want morebooks!**

Buy your books fast and straightforward online - at one of world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at  
**[www.morebooks.shop](http://www.morebooks.shop)**

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн – в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов! окружающей среде благодаря технологии Печати-на-Заказ.

Покупайте Ваши книги на  
**[www.morebooks.shop](http://www.morebooks.shop)**

KS OmniScriptum Publishing  
Brivibas gatve 197  
LV-1039 Riga, Latvia  
Telefax: +371 686 20455

[info@omniscryptum.com](mailto:info@omniscryptum.com)  
[www.omniscryptum.com](http://www.omniscryptum.com)

OMNIScriptum



FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY



FOR AUTHOR USE ONLY